

Proiettili e Coriolis

Franco Bagnoli

Spariamo un proiettile verticalmente, con una velocità iniziale v_0 . Dove ricadrà il proiettile?

Questa sembra una domanda banale, ma dobbiamo considerare la rotazione della Terra. Per piccole elevazioni, dato il grande raggio terrestre, il moto della superficie terrestre è simile ad un moto rettilineo uniforme, e quindi il proiettile ricade sul punto di lancio (nonostante qualcuno ancora ignori la relatività Galileiana [1])

Ma che accade se si aumenta v_0 ? Il punto di atterraggio dipende o no dalla rotazione della Terra?

Non è facile rispondere a questa domanda senza fare i calcoli. Possiamo provare a fare delle considerazioni qualitative. Il proiettile mantiene la velocità tangenziale ωR_0 della Terra (dove R_0 è il raggio terrestre), ma salendo in alto “rimane indietro” rispetto alla velocità tangenziale della quota raggiunta, e quindi, durante il moto ascensionale devia verso ovest (per la stessa ragione per cui i gravi in caduta deviano verso est). Ma durante la discesa accade l'opposto, e non è chiaro se questo basta a far arrivare il proiettile nello stesso punto di partenza o se addirittura farlo atterrare più a est del punto di partenza.

Un'altra considerazione è che il moto del proiettile è simile al moto di un pendolo di Foucault, che forma delle rosette precedendo nella traiettoria verso ovest. Ma anche questo non è sufficiente a permetterci di decidere dove si trova il punto di atterraggio. Tocca scrivere le equazioni, che per fortuna non sono molto difficili. Procediamo nel sistema di riferimento accelerato della Terra. Possiamo trascurare la forza centrifuga, che non fa altro che diminuire g . Inserendo la forza di gravità (che consideriamo costante per elevazioni non troppo grandi, diciamo al massimo dell'ordine di qualche chilometro) e la forza di Coriolis otteniamo

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= 2m\omega \dot{y} \\ m \ddot{y} &= -mg - 2m\omega \dot{x} \end{aligned}$$

Possiamo integrare la prima equazione da 0 (punto di partenza $y(0) = 0$, con $\dot{y}(0) = v_0$ e $\dot{x}(0) = 0$) e t ottenendo

$$\dot{x} = 2\omega y$$

il che ci dice che il moto orizzontale del proiettile è sempre diretto verso ovest, quindi necessariamente il proiettile non cadrà sul punto di partenza. Sostituendo questa equazione nella seconda otteniamo

$$\ddot{y} = -g - 4\omega^2 y$$

ovvero che il moto verticale è armonico, una cosa abbastanza sorprendente (ma ovvia se ricordiamo il pendolo di Foucault). Sostituendo le condizioni di partenza nella soluzione otteniamo

$$y(t) = \frac{g}{4\omega^2} [\cos(2\omega t) - 1] + \frac{v_0}{2\omega} \sin(2\omega t)$$

Per controllo, guardiamo che succede nel limite $\omega \rightarrow 0$: otteniamo $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Da qui possiamo ottenere una approssimazione del tempo di volo $\tau = \frac{2v_0}{g}$.

Sostituendo adesso l'equazione trovata in quella per la $\dot{x}$ e integrando, si ottiene

$$x(t) = \frac{g}{4\omega^2} [\sin(2\omega t) - 2\omega t] - \frac{v_0}{2\omega} [\cos(2\omega t) - 1]$$

e nel limite $\omega \rightarrow 0$ abbiamo $x(t) = 0$, come ci si aspettava. All'ordine successivo (il terzo), abbiamo

$$x(t) \simeq \omega \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} g t^3 \right).$$

Sostituendo il tempo di volo τ abbiamo

$$x(\tau) = \frac{4\omega v_0^3}{3g^2}.$$

Inserendo il moto della terra $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s (supponendo di essere all'equatore), e $v_0 = 1000$ m/s (velocità non irraggiungibile con un buon fucile), si ottiene un'altezza massima di 50 km (sempre trascurando la resistenza dell'aria!, comunque piccola rispetto al raggio terrestre di 6000 km), un tempo di volo $\tau = 200$ s e una deviazione verso ovest di 1 km.

In presenza dell'aria, il calcolo è molto più difficile. Non si può infatti supporre che valgano le leggi del moto viscoso laminare, visto che a tali velocità il moto sarà senz'altro turbolento. Però il proiettile dovrebbe arrivare rapidamente a altezze tali che la densità dell'aria sia molto ridotta (oltre i 10 km). Ci si può comunque aspettare che il proiettile ricada ad distanza intermedia dal punto di partenza, comunque verso ovest.

Quindi effettivamente c'è uno spostamento verso ovest, come si potrebbe ingenuamente supporre senza considerare la velocità di trascinamento della Terra, ovviamente di una entità molto diversa (la velocità tangenziale della Terra è di 437 m/s, in 200 secondi il proiettile, senza la velocità tangenziale orizzontale, cadrebbe a circa 87 km di distanza verso ovest).

Per ulteriori dettagli, vedere la Ref. [2]

[1] https://youtu.be/-9Jp_XCvVto

[2] Franco Bagnoli e Francesco Saverio Cataliotti, Paperone e il Deposito Sotterraneo, Giornale di Fisica vol XII 103, (2001) Doi: 10.1393/gdf/i2011-10135-9