

ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Функцией $y = f(x)$ называется закон (зависимость), по которому каждому значению переменной x из множества $D(f)$ ставится в соответствие единственное значение переменной y из множества $E(f)$. Множество $D(f)$ называется *областью определения* функции, множество $E(f)$ – *множеством значений* функции.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ областью определения будут все действительные числа, а областью значений – отрезок $[-1; 1]$.

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{x-1} + \log_2(x^2 - 2x)$.

Для нахождения области определения найдем ограничения на переменную x :

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \log_2(x^2 - 2x)$$

$$D(f):$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \Leftrightarrow x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

То есть $D(f) = (2; +\infty)$.

Пример. Найти область значений функции $g(x) = 3|\sin x| + 2$.

Будем исходить из ограниченности синуса:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$0 \leq |\sin x| \leq 1$$

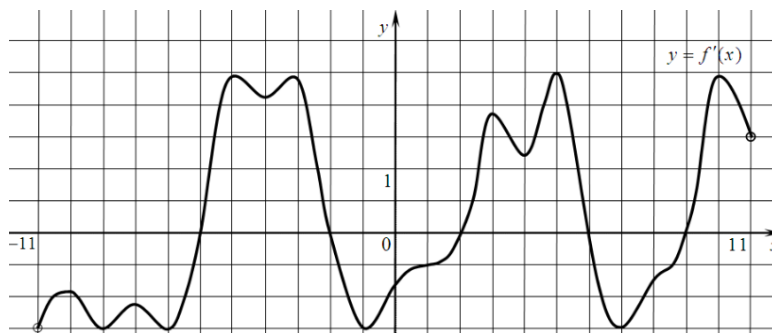
$$0 \leq 3|\sin x| \leq 3$$

$$2 \leq 3|\sin x| + 2 \leq 5$$

То есть $E(g) = [2; 5]$.

Еще проще находить область определения и множество значений по графику функции.

Пример.



Заметим, что переменная x «пробегаёт» все значения от -11 до 11 , но сами точки -11 и 11 выколоты, то есть $D(f) = (-11; 11)$. Переменная y «пробегаёт» все значения от $-1,5$ до $2,5$, то есть $E(f) = [-1,5; 2,5]$.

Нулями функции $y = f(x)$ называют значения переменной x , при которых значение функции равно нулю. Чтобы найти нули функции, нужно решить уравнение $f(x) = 0$.

Промежутками знакопостоянства называют промежутки, на которых функция сохраняет свой знак, то есть принимает только положительные или отрицательные значения. Чтобы найти такие промежутки, нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Пример. Найти промежутки знакопостоянства функции $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$.

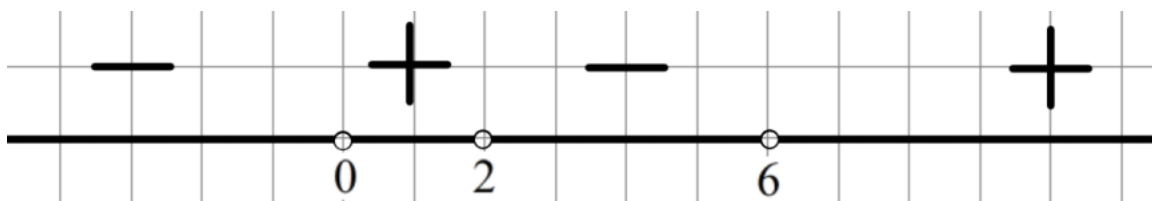
Решим неравенство $f(x) > 0$:

$$x^3 - 8x^2 + 12x > 0$$

$$x(x^2 - 8x + 12) > 0$$

$$x(x - 2)(x - 6) > 0$$

Данное неравенство решим с помощью метода интервалов:

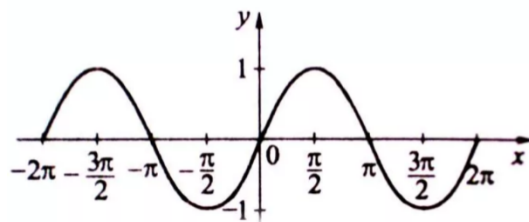


Таким образом, функция положительна на промежутках $(0; 2)$ и $(6; +\infty)$ и отрицательна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; 6)$. Нулями функции являются точки 0 , 2 и 6 (в них функция равна нулю).

Графически промежутки знакопостоянства выглядят как промежутки, на которых график функции лежит выше оси Ox (функция положительна) или ниже оси Ox (функция отрицательна).

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно 0 и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

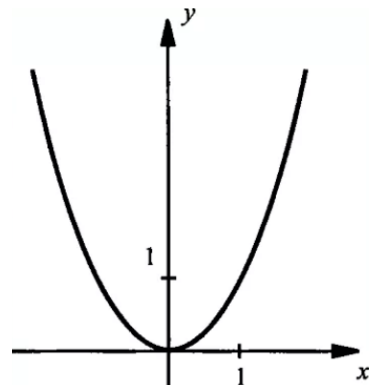
Примеры четных функций: $y = |x|, y = x^2, y = \cos x$. График этой функции симметричен относительно оси Oy .



Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно 0 и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

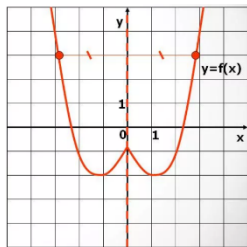
Примеры нечетных функций: $y = x, y = x^3, y = \sin x$. График такой функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется $y = f(x)$ *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, называемое *периодом*, что $f(x+T) = f(x)$. Вообще говоря, если T – период некоторой функции, то верно и равенство $f(x+nT) = f(x+T) = f(x)$, где n – любое целое число. Наименьший положительный период функции называется ее *основным периодом*.

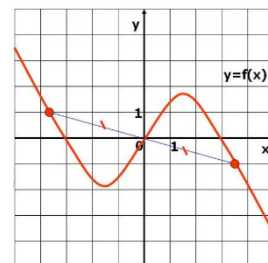


Все тригонометрические функции являются периодическими. Например, $T = 2\pi$ – период функций $y = \sin x, y = \cos x$, а $T = \pi$ – период функций $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ *возрастает на промежутке* $[a; b]$, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из того, что $x_2 > x_1$, следует, что $f(x_2) > f(x_1)$, то есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Графически это выглядит как «подъем» графика снизу вверх.



Говорят, что функция $y = f(x)$ *убывает на промежутке* $[a; b]$, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из того, что $x_2 > x_1$, следует, что $f(x_2) < f(x_1)$, то есть большему значению аргумента



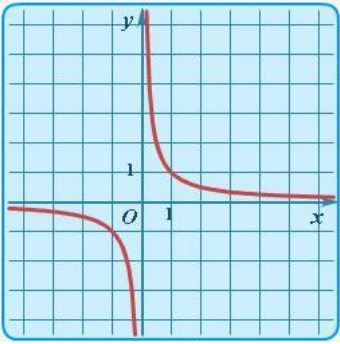
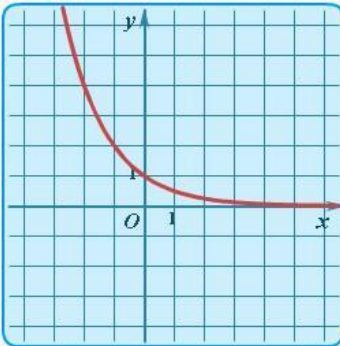
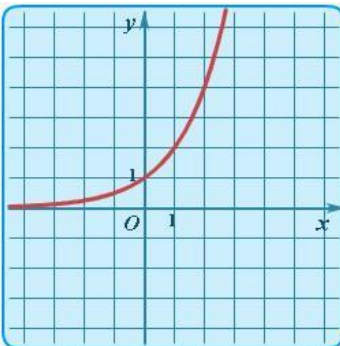
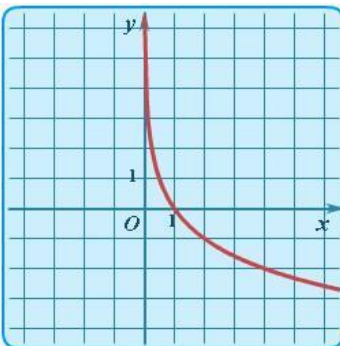
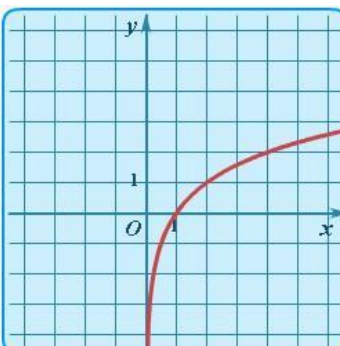
соответствует меньшее значение функции. Графически это выглядит как «спуск» графика сверху вниз.

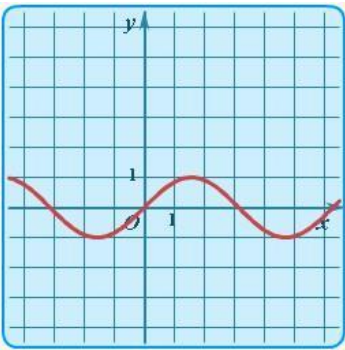
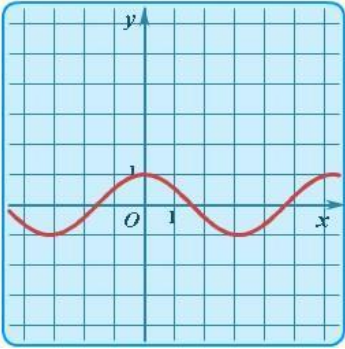
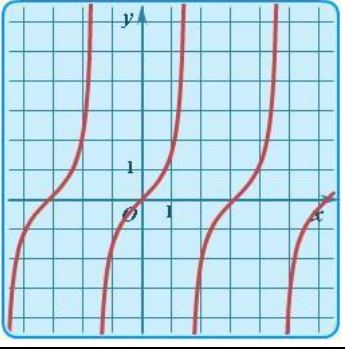
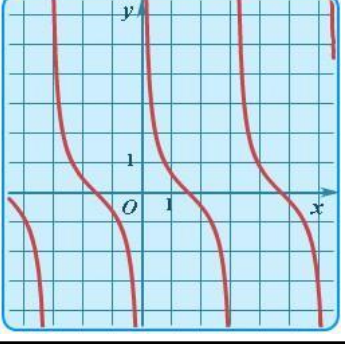
Например, функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

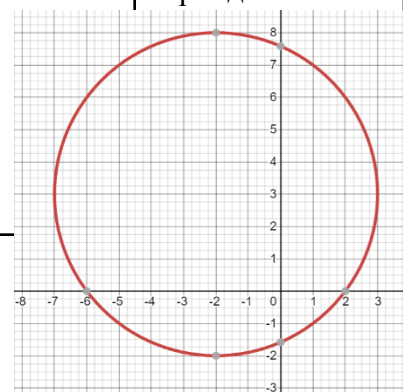
Возрастание и убывание функции называют *монотонностью*.

ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Название	Формула	График	Название графика (линии)	Комментарий
Линейная	$y = kx + b$		Прямая	Строится по двум точкам
Квадратичная	$y = ax^2 + bx + c$ $y = m(x + n)^2 + k$		Парабола	
Степенная	$y = x^3$		Кубическая парабола	Аналогично выглядят графики функций вида $y = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) Функция монотонно возрастает на всей области определения
	$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$		Ветвь параболы	Аналогично выглядят графики функций $y = x^\alpha$, где α — нецелое положительное число Функция монотонно возрастает на всей области определения

	$y = \frac{1}{x}$		Гипербола	Аналогично выглядят графики функций $y = x^{-2n+1}$
Показательная	$y = a^x$			$0 < a < 1$ Функция монотонно убывает на всей области определения
				$a > 1$ Функция монотонно возрастает на всей области определения
Логарифмическая	$y = \log_a x$			$0 < a < 1$ Функция монотонно убывает на всей области определения
				$a > 1$ Функция монотонно возрастает на всей области определения

Синус	$y = \sin x$		Синусоида	Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$
Косинус	$y = \cos x$		Косинусоида	Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$
Тангенс	$y = \operatorname{tg} x$		Тангенсоида	Функция периодическая с периодом $T = \pi$
Котангенс	$y = \operatorname{ctg} x$		Котангенсоида	Функция периодическая с периодом $T = \pi$



Кроме того, в заданиях ЦТ встречается уравнение окружности.

Итак, окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R задается уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Пример. Написать уравнение окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом 5. Изобразить окружность.

Уравнение окружности будет иметь вид:

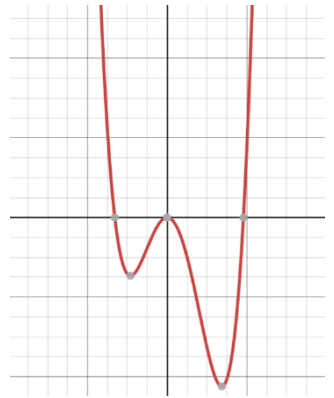
$$(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Примечание. Окружность не является графиком какой-либо функции.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Геометрические преобразования графиков элементарных функций позволяют строить более сложные графики.

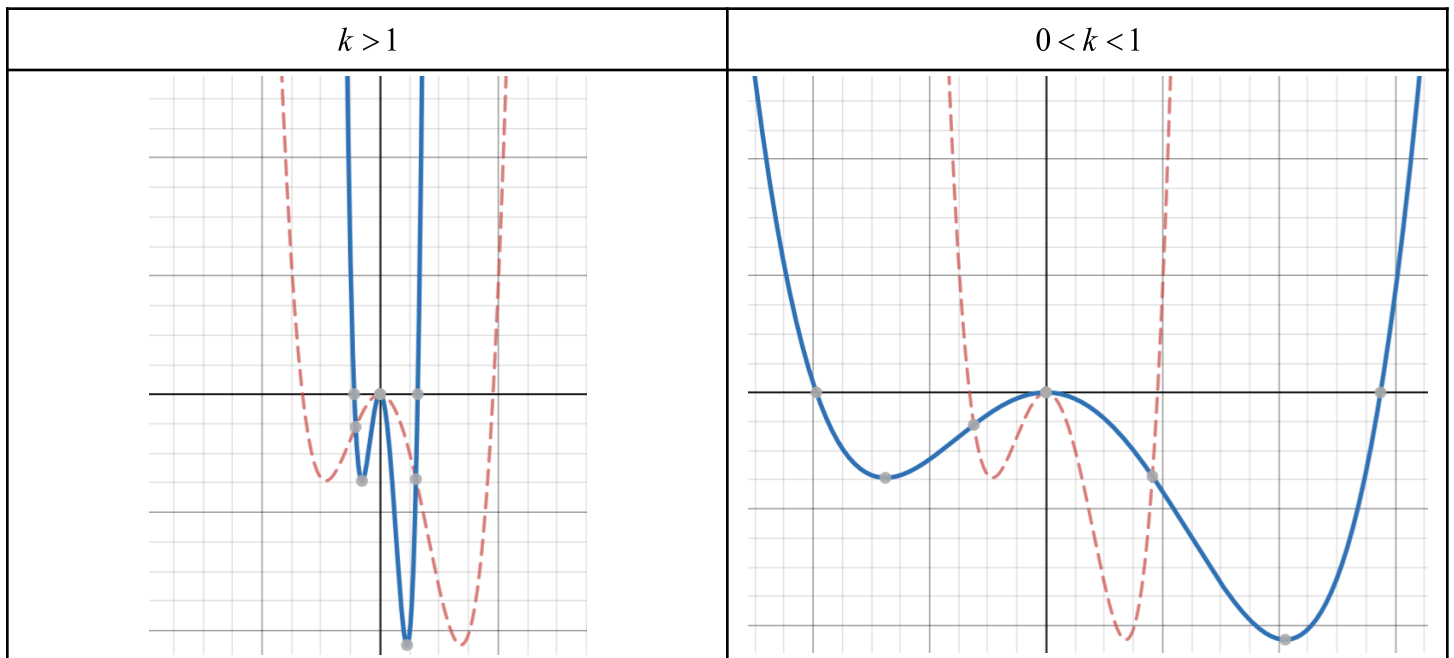


Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и ее график. С помощью этого графика можно построить графики следующих функций:

1) $y = f(kx)$

Идея: если $k > 1$, необходимо сжать график функции $y = f(x)$ к оси Oy в k раз; если $0 < k < 1$, необходимо растянуть график функции $y = f(x)$ к оси Oy в k раз.

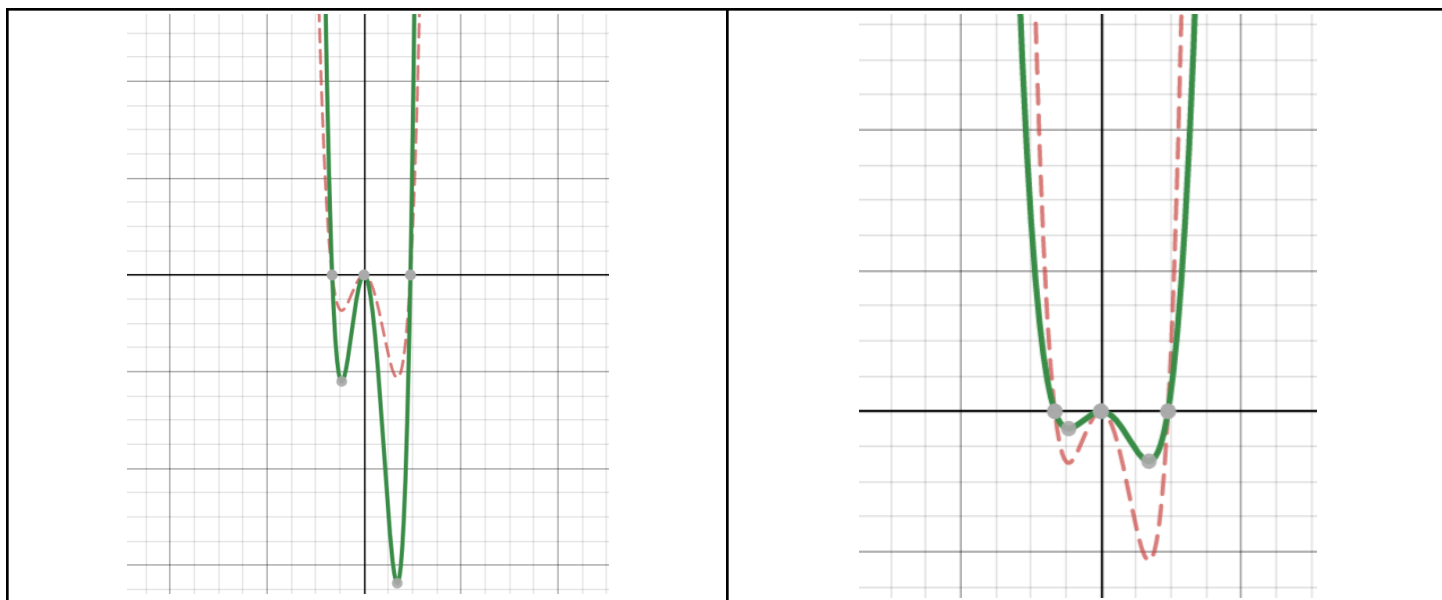
Получим следующий график:



2) $y = k \cdot f(x)$

Идея: если $k > 1$, необходимо растянуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в k раз; если $0 < k < 1$, необходимо сжать график функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в k раз.

$k > 1$	$0 < k < 1$
---------	-------------



3) $y = f(-x)$

Идея: отобразить график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси Oy .

Получим:



4) $y = -f(x)$

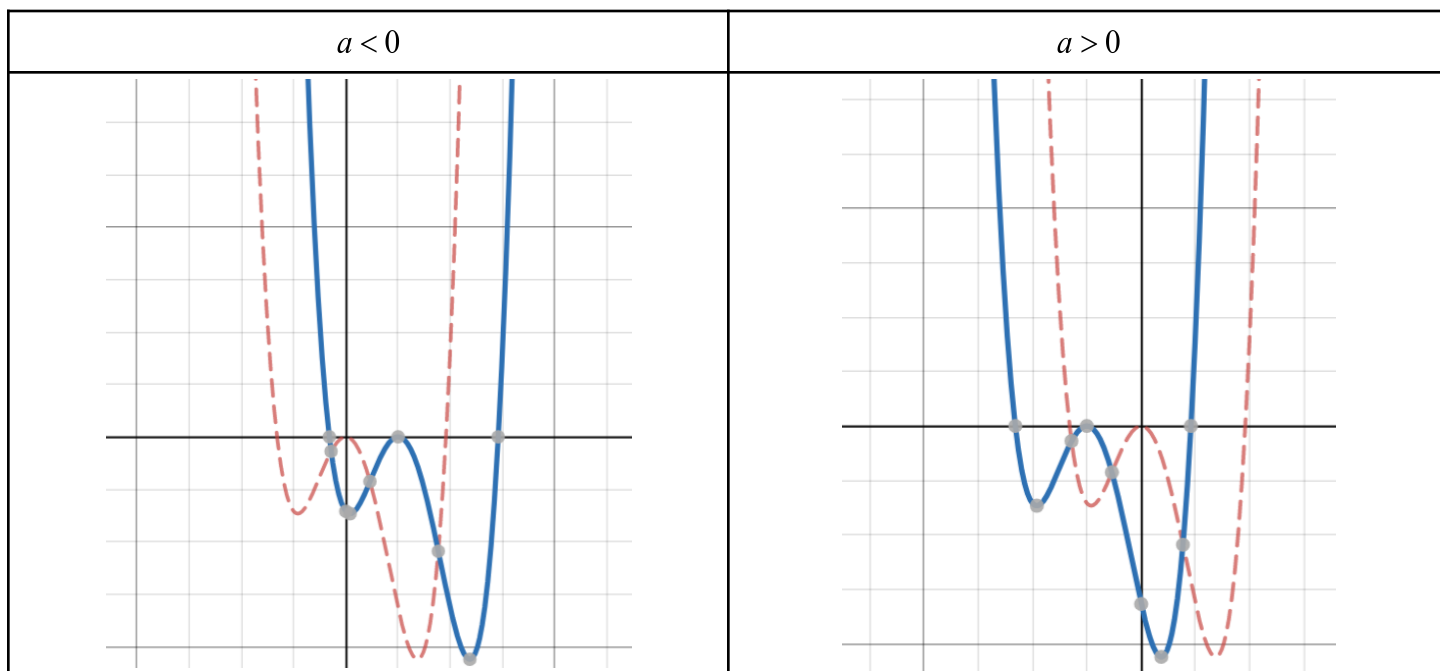
Идея: отобразить график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси Ox .

Получим:



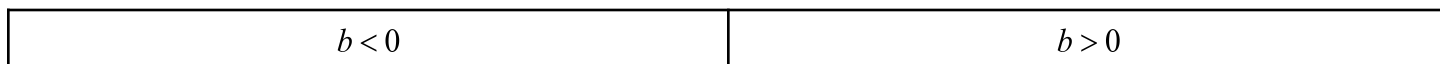
5) $y = f(x+a)$

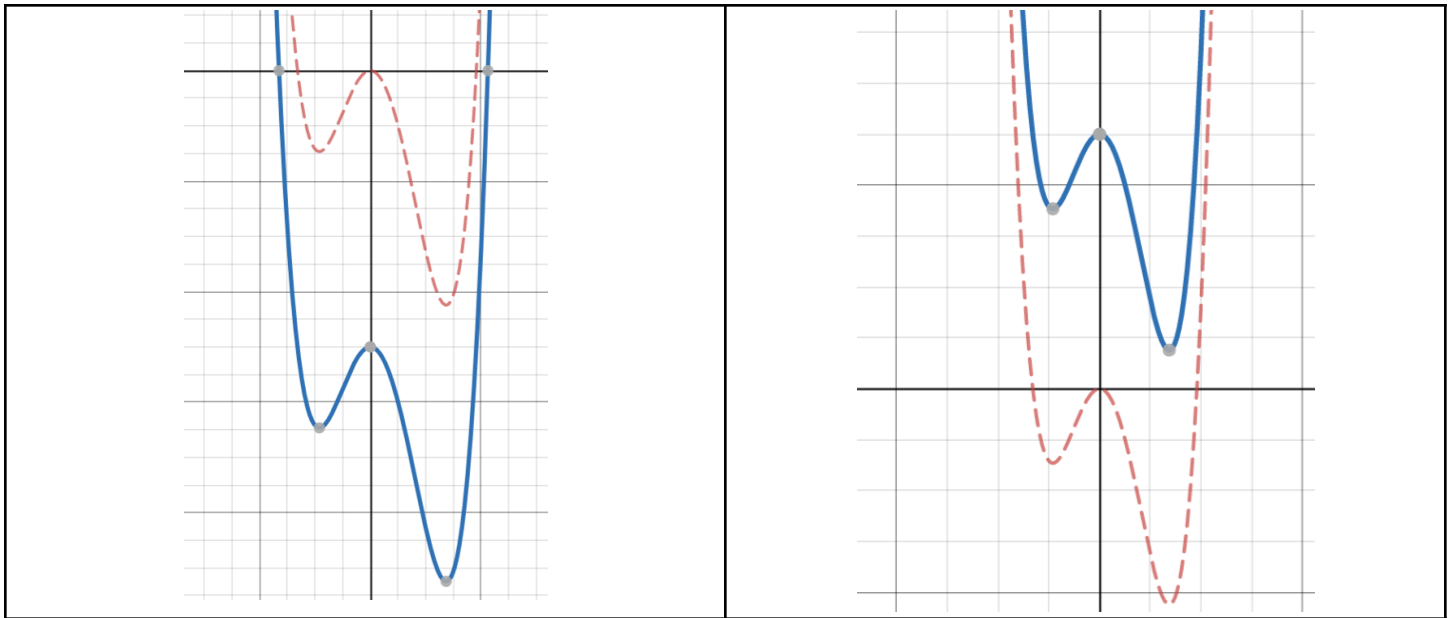
Идея: если $a < 0$, то сдвинуть на $|a|$ единиц влево; если $a > 0$, то сдвинуть на $|a|$ единиц вправо.



6) $y = f(x)+b$

Идея: если $b < 0$, то сдвинуть на $|a|$ единиц вниз; если $b > 0$, то сдвинуть на $|a|$ единиц вверх.





Общая схема построения графика функции $y = a \cdot f(kx + b) + c$

Представим функцию в следующем виде:

$$y = a \cdot f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right) + c$$

Последовательность построения следующая:

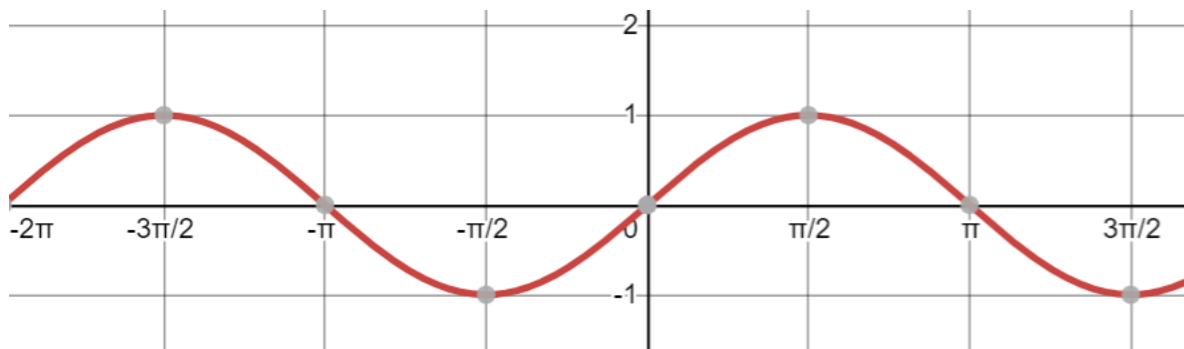
- 1) $y = f(x)$;
- 2) $y = f(kx)$;
- 3) $y = a \cdot f(kx)$;
- 4) $y = a \cdot f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right) + c$. (сдвиг вдоль оси Ox происходит на $\frac{b}{k}$ единиц!)

Пример. Построить график функции $y = 2 \sin(1,5 - 3x) + 1$.

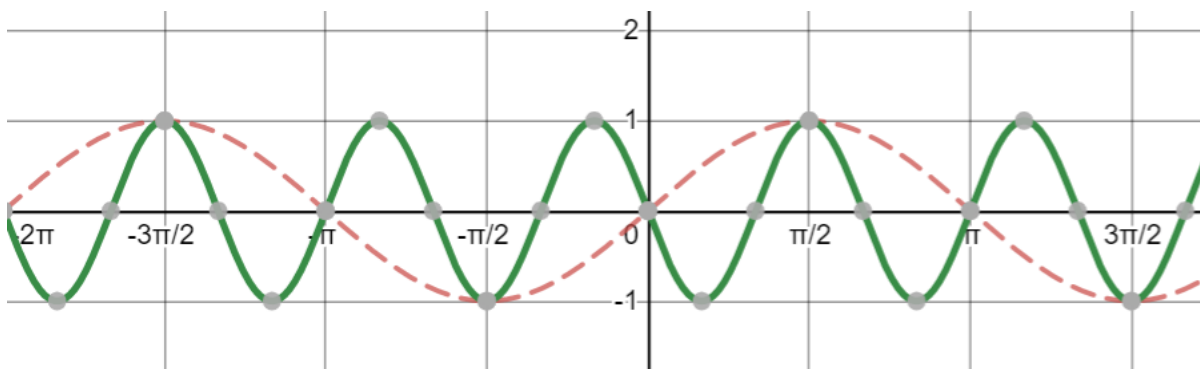
Представим функцию в виде $y = 2 \sin(-3(x - 0,5)) + 1$.

Строим последовательно:

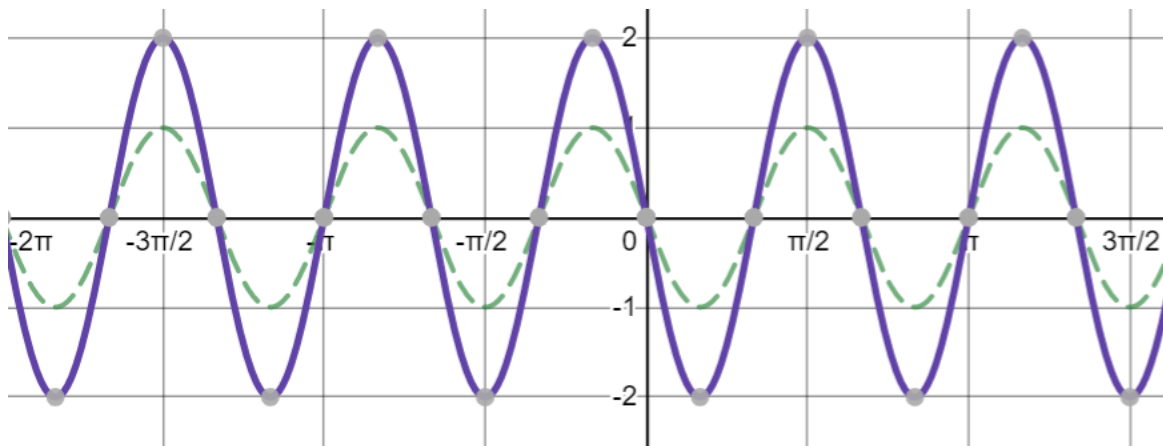
- 1) $y = \sin x$.



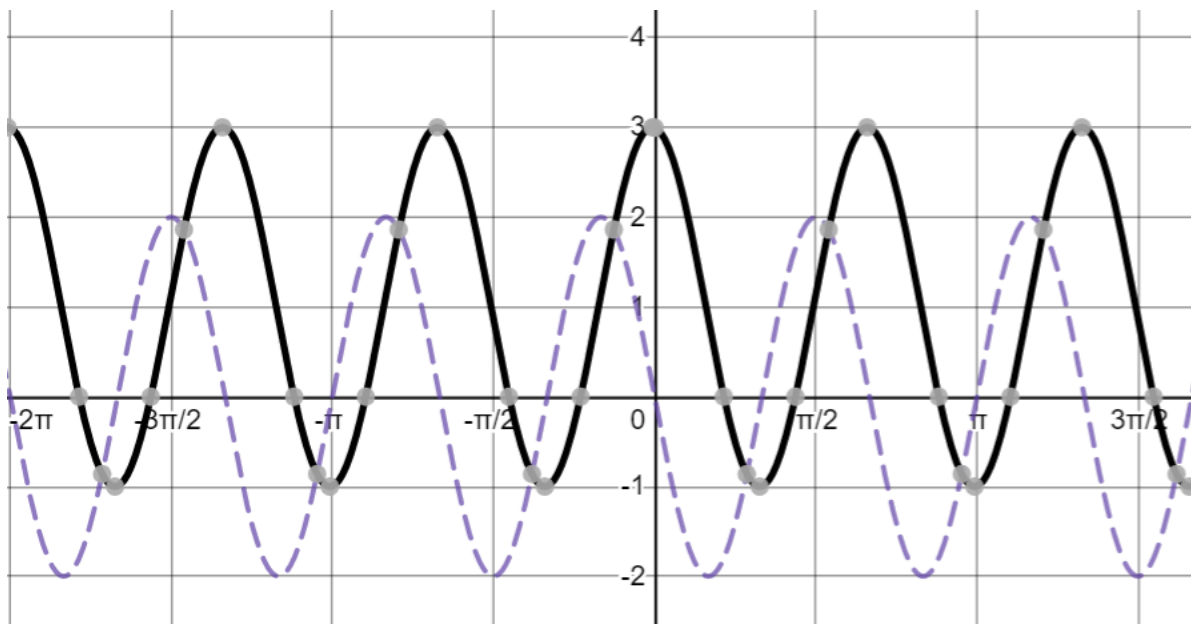
- 2) $y = \sin(-3x)$: отображаем симметрично относительно оси Oy и сжимаем в 3 раза к ней.



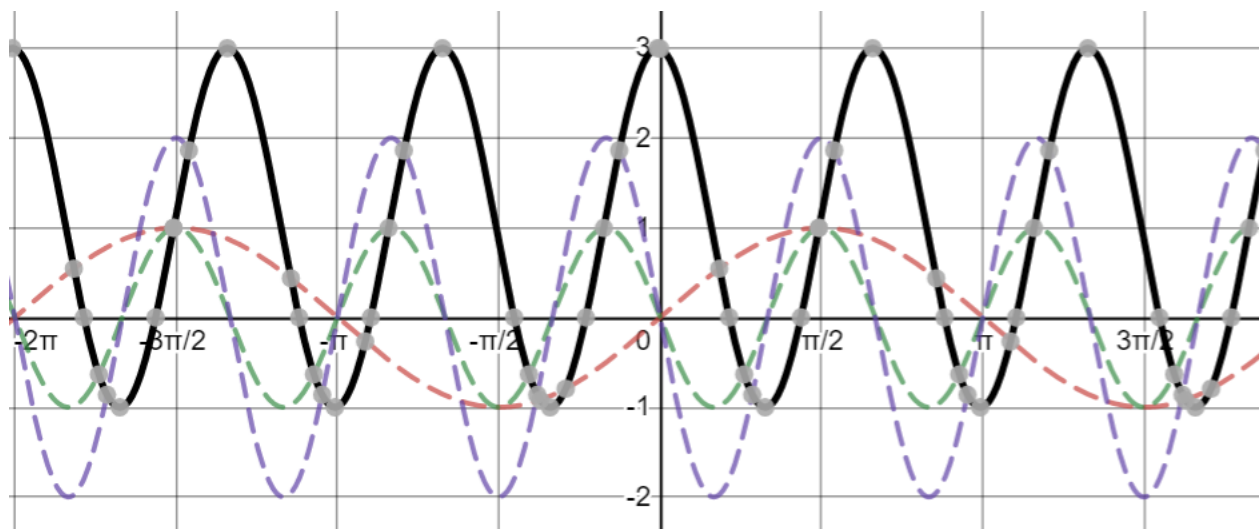
- 3) $y = 2\sin(-3x)$: растягиваем график в 2 раза вдоль оси Oy .



- 4) $y = 2\sin(-3(x-0,5))+1$: сдвигаем график на 0,5 единиц вправо и 1 единицу вверх.



В одной системе координат все преобразования будут выглядеть так:

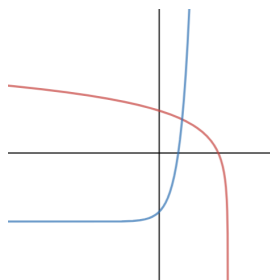


ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ И ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Некоторые свойства функций используются при решении уравнений. Самым важным, пожалуй, является монотонность.

Важно понимать, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ возрастают (убывают), то их сумма также возрастает (убывает).

Если функция $f(x)$ монотонно возрастает, а функция $g(x)$ – монотонно убывает на области определения, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет максимум один корень. Проиллюстрируем данный факт графически:



Уравнение $f(x) = a$ также имеет максимум один корень, если $f(x)$ – монотонная функция.

В таком случае корень уравнения можно попробовать угадать.

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{96}.$$

Пример. Решить уравнение

Заметим, что при $x \geq 5$ функция $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{x+3}$ монотонно возрастает как сумма

двух возрастающих функций. Кроме того, функция $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{96}$ убывает при $x > 0$.

Значит, если уравнение имеет корень, то он единственный. Подберем корень: при $x = 6$

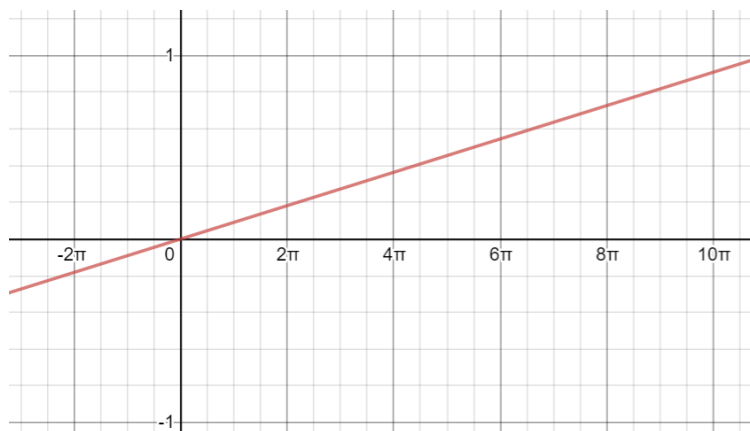
$f(6) = \sqrt{6-5} + \sqrt{6+3} = 1 + 3 = 4$, $g(6) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{6}{96} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$. Таким образом, $x = 6$ – корень данного уравнения.

Иногда уравнения вида $f(x) = g(x)$ можно решать графически. Идея состоит в том, чтобы построить графики обеих частей и найти точки их пересечения. Абсциссы этих точек и будут корнями уравнения.

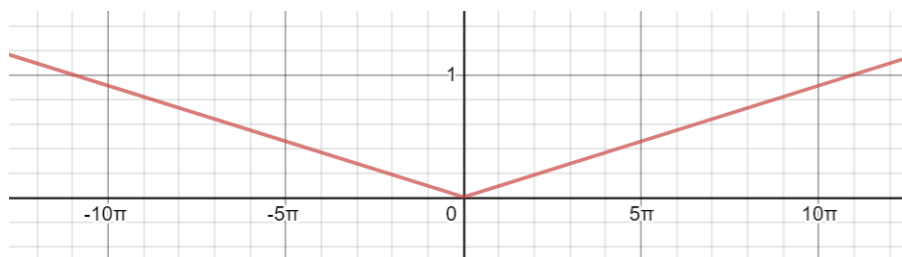
$$\cos x = \left| \frac{x}{11\pi} \right|$$

Пример. Найти количество корней уравнения

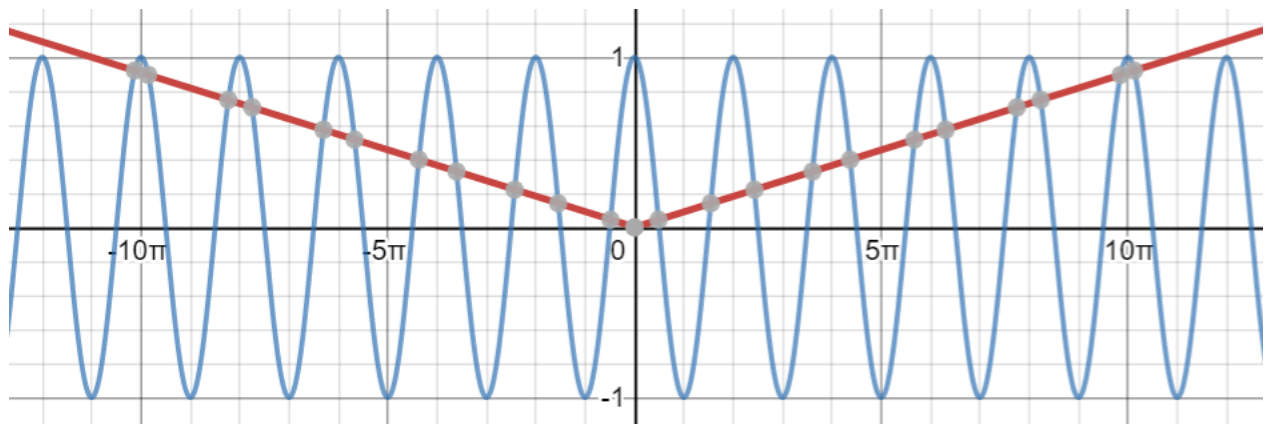
Построим графики функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \left| \frac{x}{11\pi} \right|$. График функции f – элементарная функция (косинусоида). Построим график функции g . Для начала изобразим график функции $y = \frac{x}{11\pi}$. Графиком является прямая, которую можно построить по двум точкам: $y(0) = 0; y(11\pi) = 1$.



Чтобы построить график функции $g(x) = \left| \frac{x}{11\pi} \right|$, достаточно отобразить часть графика, находящуюся ниже оси Ox , относительно этой оси. Получим:



Изобразим также график функции $f(x) = \cos x$ и посчитаем количество общих точек графиков.



Графики имеют 22 общие точки. Ответ: уравнение имеет 22 корня.