

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để giá trị của A và B trái dấu.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=4m-5 \\ 2x+y=3m \end{cases}$ (m là tham số)

- Giải hệ phương trình khi $m = 3$.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số)

- Tìm m để (d) đi qua điểm $A(1; -9)$.
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

Câu 4. (3,5 điểm)

Qua điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D).

- Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO \perp AB$.
- Chứng minh $MA \cdot AD = MD \cdot AC$.
- Gọi I là trung điểm của dây cung CD và E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OI . Tính độ dài đoạn thẳng OE theo R khi $OI = \frac{R}{3}$.

d) Qua tâm O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại P và Q . Tìm vị trí của điểm M để diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (0,5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -3x^2 - 4x\sqrt{y} + 16x - 2y + 12\sqrt{y} + 1998$.

--- HẾT ---

Đáp án tham khảo:

Câu 1 (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$).

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

Thay $x=9$ (TMDK) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-1} = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vậy khi $x=9$ thì $A=2$.

b) Rút gọn biểu thức B.

Với $x > 0, x \neq 1$ thì:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 - x + 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$B = \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 1$ thì $B = \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$.

c) Tìm x để giá trị của A và B trái dấu.

Để giá trị của A và B trái dấu thì $AB < 0$.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x} + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 1} < 0$$

$$\text{Vì } 4 > 0 \text{ nên } \frac{4}{\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có $0 < x < 1$.

Vậy để giá trị của A và B trái dấu thì $0 < x < 1$.

Câu 2 (2 điểm)

Cách giải:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4m - 5 \\ 2x + y = 3m \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$.

Với $m = 3$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 25 \\ y = 9 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 - 2 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; -1)$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -1$.

Ta có:
$$\begin{cases} x - 2y = 4m - 5 & (1) \\ 2x + y = 3m & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có: $y = 3m - 2x$

Thế vào phương trình (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x - 2(3m - 2x) = 4m - 5$$

$$\Leftrightarrow x - 6m + 4x = 4m - 5$$

$$\Leftrightarrow 5x = 10m - 5$$

$$\Leftrightarrow x = 2m - 1$$

$$\Rightarrow y = 3m - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = 3m - 2(2m - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 3m - 4m + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -m + 2$$

$\Rightarrow$ Với mọi m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2m - 1; -m + 2)$.

Theo đề bài ta có: $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -1$ (*)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \neq 0 \\ -m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (*) &\Leftrightarrow \frac{2}{2m-1} - \frac{1}{-m+2} = -1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{2m-1} + \frac{1}{m-2} + 1 = 0 \\
&\Rightarrow (2m-1)(m-2) + 2(m-2) + 2m-1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 + 2m - 4 + 2m - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 - m - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 3m - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2m(m+1) - 3(m+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (m+1)(2m-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ 2m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \text{ (tm)} \\ m=\frac{3}{2} \text{ (tm)} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $m = -1$ và $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 3 (2 điểm)

Cách giải:

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; -9)$.

Đường thẳng $(d): y = 3mx + 1 - m^2$ đi qua điểm $A(1; -9)$

$$\Rightarrow -9 = 3m \cdot 1 + 1 - m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 9 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0$$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4 \cdot 10 = 49 > 0$

$$\Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } \begin{cases} m_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5 \\ m_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \end{cases}$$

Vậy $m = -2$ hoặc $m = 5$ thỏa mãn bài toán.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là:

$$x^2 = 3mx + 1 - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm là x_1, x_2

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2$$

$$\Leftrightarrow \Delta > 0$$

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 4m^2 + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 4 > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ Với mọi m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Vi-et với phương trình (*) ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$x_1 + x_2 = 2x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 3m = 2(m^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4.2.2 = 25 > 0$

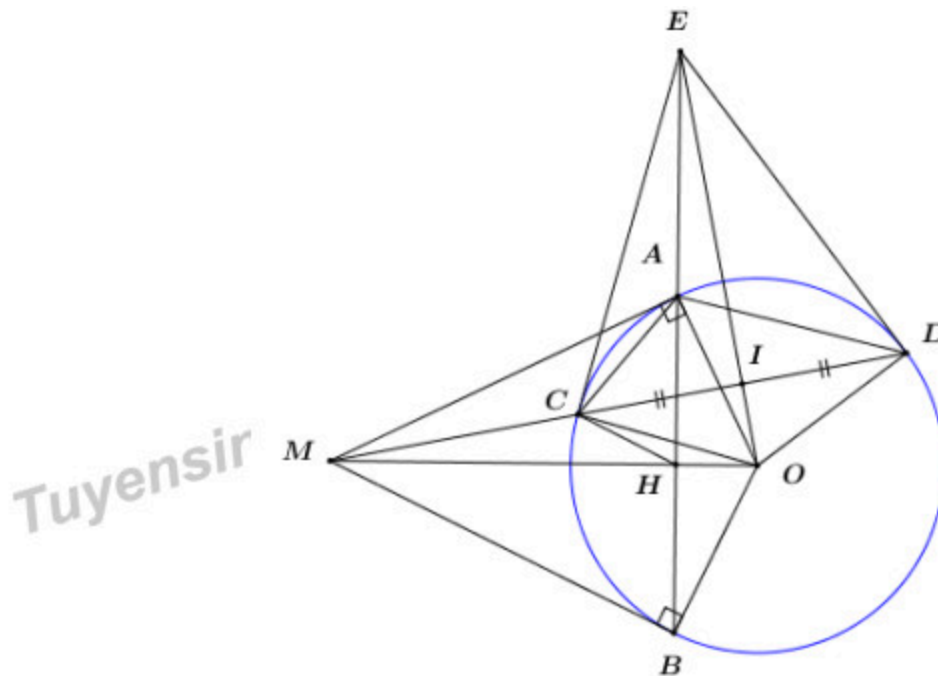
$$\Rightarrow \text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } \begin{cases} m_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2.2} = 2 \\ m_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2.2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ và $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cách giải:

Qua điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D).



a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO \perp AB$.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$.

Xét tứ giác $MAOB$ có: $\angle OAM + \angle OBM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

Vì $OA = OB (= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB .

$MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB .

$\Rightarrow MO$ là trung trực của đoạn thẳng AB .

Vậy $MO \perp AB$ (đpcm).

b) Chứng minh $MA.AD = MD.AC$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có:

$\angle AMD$ chung;

$\angle MAC = \angle MDA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC).

$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD} \text{ (hai cạnh tương ứng)} \Rightarrow MA.AD = MD.AC \text{ (dpcm)}.$$

c) Gọi I là trung điểm của dây cung CD và E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OI . Tính độ dài đoạn thẳng OE theo R khi $OI = \frac{R}{3}$.

Gọi $AB \cap OM = \{H\}$, theo ý a) ta có $OM \perp AB$ tại H .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM , đường cao AH ta có: $OA^2 = OH.OM$.

$$\text{Mà } OA = OC (=R) \text{ nên } OC^2 = OH.OM \Rightarrow \frac{OC}{OH} = \frac{OM}{OC}.$$

$$\text{Xét } \triangle OCH \text{ và } \triangle OMC \text{ có: } \angle COM \text{ chung; } \frac{OC}{OH} = \frac{OM}{OC} \text{ (cmt).}$$

$$\Rightarrow \triangle OCH \sim \triangle OMC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle OCH = \angle OMC = \angle OMI \text{ (1) (hai góc tương ứng).}$$

Vì I là trung điểm của CD (gt) nên $OI \perp CD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$$\Rightarrow \triangle OMI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \angle OMI + \angle MOI = 90^\circ.$$

Lại có: $\angle OEH + \angle EOH = 90^\circ$ (do tam giác OEH vuông tại H).

$$\text{Mà } \angle MOI = \angle EOH \text{ nên } \angle OMI = \angle OEH \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \angle OCH = \angle OEH \text{ (= } \angle OMI \text{)}.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OECH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 góc kề cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau).

$$\Rightarrow \angle OCE = \angle OHE = 90^\circ \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } OE \text{)}.$$

$\Rightarrow \triangle OCE$ vuông tại C , có đường cao CI .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OCE ta có:

$$OC^2 = OI.OE \Rightarrow OE = \frac{OC^2}{OI} = \frac{R^2}{\frac{R}{3}} = 3R.$$

Vậy khi $OI = \frac{R}{3}$ thì $OE = 3R$.

$$\text{Khi đó } S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2} MO.PQ = \frac{1}{2} x \cdot \frac{2xR}{\sqrt{x^2 - R^2}} = R \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{x^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $\sqrt{x^2 - R^2}$ và $\frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$ ta có:

$$\sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \geq 2 \sqrt{\sqrt{x^2 - R^2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}} = 2R.$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta MPQ} \geq R \cdot 2R = 2R^2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - R^2} = \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \Leftrightarrow x^2 - R^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2} \text{ (tm)}.$$

Vậy diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi và chỉ khi M cách tâm O một khoảng bằng $R\sqrt{2}$.

Câu 5 (0,5 điểm)

Cách giải:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -3x^2 - 4x\sqrt{y} + 16x - 2y + 12\sqrt{y} + 1998$.

Điều kiện: $y \geq 0$.

$$\begin{aligned} P &= -3x^2 - 4x\sqrt{y} + 16x - 2y + 12\sqrt{y} + 1998 \\ &= (-2x^2 - 4x\sqrt{y} - 2y + 12x + 12\sqrt{y}) - x^2 + 4x + 1998 \\ &= -2(x^2 + 2x\sqrt{y} + y - 6x - 6\sqrt{y} + 9) - (x^2 - 4x + 4) + 18 + 4 + 1998 \\ &= -2(x + \sqrt{y} - 3)^2 - (x - 2)^2 + 2020 \end{aligned}$$

$$\text{Vi } \begin{cases} -2(x + \sqrt{y} - 3)^2 \leq 0 \quad \forall x, y \geq 0 \\ -(x - 2)^2 \leq 0 \quad \forall x \end{cases} \Rightarrow P \leq 2020 \quad \forall x, y \geq 0$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{y} - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{y} = 3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy $\text{Max } P = 2020$ khi $x = 2$ và $y = 1$.