

+Ένα παιδικό αυτοκινούμενο πυροβόλο

σχήμα 1



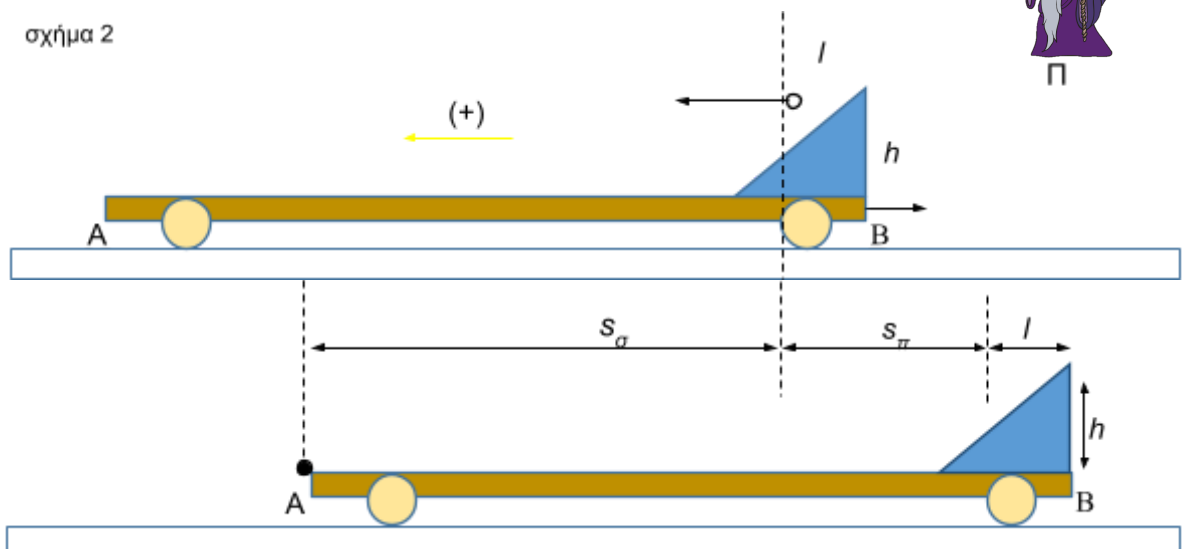
Ο κατασκευαστής ενός παιδικού πυροβόλου, που φαίνεται στο σχήμα 1, θέλει να υπολογίσει το ελάχιστο μήκος που πρέπει να έχει η πλατφόρμα AB, ώστε αν τοποθετήσει το πυροβόλο ακριβώς στο άκρο B, το βλήμα να μην πέφτει πάνω στην πλατφόρμα. Η μάζα του παιχνιδιού είναι $M = 0,45\text{kg}$ και εκτοξεύει σφαιρίδια μάζας $m = 0,05\text{kg}$ οριζόντια από ύψος $h = 0,2\text{m}$ πάνω από την πλατφόρμα. Η ταχύτητα εκτόξευσης του σφαιριδίου ως προς τον ακίνητο παρατηρητή Π , έχει μέτρο $|v_o| = 1,8\text{m/s}$. Η εκτόξευση γίνεται με τηλεχειρισμό μικρού εκτοξευτήρα μήκους $l = 0,15\text{m}$, με τη βοήθεια ελατηρίου, που το φυσικό μήκος φτάνει μέχρι το στόμιο εξόδου. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 18\text{N/m}$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, δεν υπάρχουν τριβές και η εκτόξευση του σφαιριδίου διαρκεί αμελητέο χρόνο.

- Αν αφήσει ελεύθερη την πλατφόρμα με ποια ταχύτητα θα κινηθεί αυτή αμέσως μετά την εκτόξευση του σφαιριδίου;
- Πόσο πρέπει να είναι το μέγιστο μήκος της πλατφόρμας για να μην πέσει πάνω της το βλήμα;
- Βρείτε την μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου και την αρχική επιτάχυνση του σφαιριδίου.

Απάντηση

α) Το σύστημα πλατφόρμα - σφαιρίδιο είναι μονωμένο κατά τον οριζόντιο άξονα, αφού οι μοναδικές δυνάμεις που δέχονται τα σώματα του συστήματος οφείλονται στο ελατήριο εκτόξευσης του σφαιριδίου και είναι εσωτερικές για το σύστημα. Ας σκεφτούμε επίσης ότι για να διατηρηθεί η ορμή του συστήματος σταθερή και όσο η αρχική, δηλαδή μηδέν, πρέπει

σχήμα 2



πλατφόρμα να κινηθεί σε αντίθετη κατεύθυνση από το σφαιρίδιο (σχήμα 2). Με θετική φορά προς τα αριστερά:

$$p_{\pi \text{ πριν}} = p_{\pi \text{ μετά}} \Leftrightarrow 0 = m|v_{\sigma}| - M|v_{\pi}| \Leftrightarrow |v_{\pi}| = \frac{m|v_{\sigma}|}{M} \Leftrightarrow$$

$$|v_{\pi}| = \frac{0,05 \cdot 1,8}{0,45} \Leftrightarrow |v_{\pi}| = \frac{0,09}{0,45} \Leftrightarrow |v_{\pi}| = 0,2 \text{ m/s}$$

β) Το σφαιρίδιο εκτελεί οριζόντια βολή.

Ο χρόνος καθόδου είναι

$$t_{\text{καθ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{10}} = \sqrt{0,04} = 0,2 \text{ s}$$

Το βεληνεκές του σφαιριδίου είναι $s_{\sigma} = |v_{\sigma}| \cdot t_{\text{καθ}} = 1,8 \cdot 0,2 = 0,36 \text{ m}$

Η πλατφόρμα θα οπισθοχωρήσει κατά $s_{\pi} = |v_{\pi}| \cdot t_{\text{καθ}} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \text{ m}$

Άρα πρέπει να έχει ελάχιστο μήκος $L = s_{\sigma} + s_{\pi} + l = 0,36 + 0,04 + 0,15 = 0,55 \text{ m}$

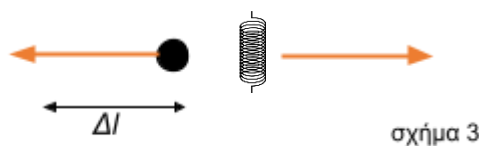
γ) Η μέγιστη συσπείρωση Δl του ελατηρίου βρίσκεται με την ΑΔΕ για το σύστημα.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια αμέσως μετά την εκτόξευση δεν έχει αλλάξει. Το σύστημα, αμέσως μετά την απελευθέρωση του σφαιριδίου αποκτά μόνο κινητική ενέργεια, που οφείλεται στην αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

$$U_{\text{ελ}} = K_{\sigma} + K_{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} m v_{\sigma}^2 + \frac{1}{2} M v_{\pi}^2 \Leftrightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{m v_{\sigma}^2 + M v_{\pi}^2}{k}} \Leftrightarrow$$

$$\Delta l = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 1,8^2 + 0,45 \cdot 0,2^2}{18}} \Leftrightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{0,18}{18}} \Leftrightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Το ελατήριο ασκεί δύναμη ίδιου μέτρου στο σφαιρίδιο και την πλατφόρμα (σχήμα 3).



σχήμα 3

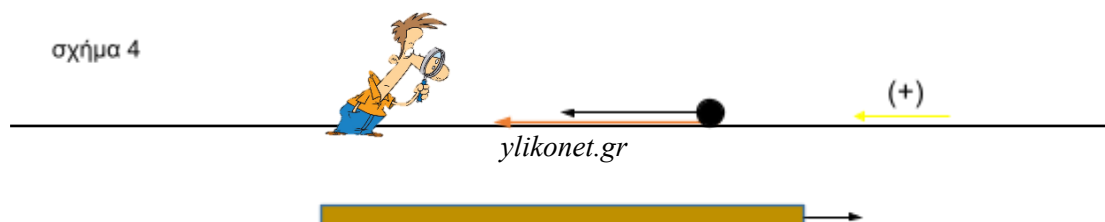
Η αρχική επιτάχυνση της πλατφόρμας βρίσκεται από τον 2ο Νόμο Newton:

$$\sum F = M \cdot a_0 \Leftrightarrow F_{\text{ελ}} = M \cdot a_0 \Leftrightarrow k \cdot \Delta l = M \cdot a_0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 = \frac{k \cdot \Delta l}{M} \Leftrightarrow a_0 = \frac{18 \cdot 0,1}{0,45} \Leftrightarrow a_0 = 4 \text{ m/s}^2$$

Σχόλιο

σχήμα 4



Η ανάρτηση αποτελεί μια ευκαιρία για αναφορά στη **σχετική ταχύτητα**. Είναι η ταχύτητα που θα μετρήσει ένας κινούμενος παρατηρητής B για έναν άλλο επίσης κινούμενο παρατηρητή A. Ορίζεται ως:

$$\vec{v}_{σχ(A/B)} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

όπου $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ οι - ως προς ακίνητο παρατηρητή - ταχύτητες των A και B.

Στην περίπτωση μας (σχήμα 4), με θετική φορά προς τα αριστερά, η σχετική ταχύτητα του σφαιριδίου ως προς την πλατφόρμα είναι:

$$\vec{v}_{σχ(\sigma/\pi)} = \vec{v}_\sigma - \vec{v}_\pi \Leftrightarrow v_{σχ(\sigma/\pi)} = v_\sigma - v_\pi = +1,5 - (-0,5) = +2 \text{ m/s}$$

Τότε όμως ο παρατηρητής P πάνω στην πλατφόρμα μπορεί να λύσει το ερώτημα β, πιο εύκολα, αφού βλέπει βεληγεκές

$$s = |v_{σχ}| \cdot t_{καθ} = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ m} \quad \text{άρα μετράει συνολικά} \quad L = s + l = 0,4 + 0,15 = 0,55 \text{ m}$$

Ανδρέας Ριζόπουλος