
1990

1.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ tiene como máximo una raíz en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de b hay exactamente una raíz de dicha ecuación en dicho intervalo?

Resolución

Para la primera parte vamos a usar el teorema de Rolle, que dice si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Supongamos que hubiese 2 raíces, m y n, entonces $f(m) = f(n) = 0$.
Aplicamos el teorema de Rolle a $f(x) = x^3 - 3x + b$ en el intervalo $[m, n]$.
Al ser f una función polinómica cumple las hipótesis del teorema y $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Luego, existiría un $c \in (m, n)$, tal que $f'(c) = 0$. O sea, $3c^2 - 3 = 0$ y, por tanto, $c = 1$ ó $c = -1$. Lo cual es imposible por ser $-1 \le m < c < n \le 1$

Como en $[-1, 1]$ resulta que $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$, f es decreciente en $[-1, 1]$.

Vamos a usar teorema de Bolzano, que dice: Si f es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.
En este caso, $f(x) = x^5 - 3x - 1$ y $[a, b] = [-1, 1]$. Se cumple:
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + b = b + 2$ y $f(1) = 1^3 - 3.1 + b = b - 2$

Al ser f decreciente en $[-1, 1]$, para que halla exactamente una raíz debe ser $b + 2 > 0$ y $b - 2 < 0$
O sea, debe ser $-2 < b < 2$

2.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión.

Resolución

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Si $x < 1$, $f''(x) < 0$ (f cóncava) y si $x > 1$, $f''(x) > 0$ (f convexa). Luego, para $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$
es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$; $f'(x_0) = f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$

$f(x_0) = f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 2 = 0$. La recta tangente es $rtg: y = -3(x - 1) + 0$; $rtg: y = 3 - 3x$

3.- Calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

Resolución

$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$. Hallando la forma mixta de la fracción obtenemos,

$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$; observamos que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x - 3}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$

Multiplicando los dos miembros por $(x - 1)(x - 2)$, tenemos $2x - 3 = A(x - 2) + B(x - 1)$.

Para x = 1, sustituyendo, –1 = –A, de donde A = 1 ; Para x = 2, sustituyendo, 1 = B

$I = \int\left(x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln ln\,|x - 1| + \ln ln\,|x - 2| + k.$

4.- Determinar a para que se verifique $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = 2$

Resolución

$$2 = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1} + x}$$

Dividimos numerador y denominador entre x y queda $2 = \lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{a}{2}$. Luego, a = 4.

5.- Considerar la función $f(x) = \begin{cases} x^3, & si\ 0\le x\le 1 \\ 7x - 6, & si\ 1 < x\le 2 \end{cases}$ ¿Cumple esta función las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange? ¿Existe algún punto c del [0, 2] tal que f(2) – f(0) = 2f '(c)?

Resolución

El teorema del valor medio de Lagrange dice: Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto r ∈ (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(r)(b - a)$$

Geométricamente significa que hay al menos un c ∈ (a, b) (punto de la gráfica P(c, f(c)) tal que la recta tangente en x = c es paralela a la recta que pasa por A y B, siendo A(a, f(a)) y B(b, f(b)).

Para x ≠ 1, f es continua y derivable porque las funciones polinómicas son continuas.

Además, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & si\ 0\le x < 1 \\ 7, & si\ 1 < x\le 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1^3 = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7.1 - 6 = 1 \Rightarrow$ f es continua en x = 1

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3.1^2 = 3 \neq \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 7 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 1

Luego, f no cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0, 2] (no es derivable en (0, 2), por no ser derivable en x = 1.

Veamos si existe c ∈ [0, 2] tal que f(2) – f(0) = 2f '(c) ; f(2) = 7.2 – 6 = 8 ; f(0) = 0^3 = 0

$f'(c) = \begin{cases} 3c^2, & si\ 0\le c < 1 \\ 7, & si\ 1 < c\le 2 \end{cases}$.

Sustituyendo, 8 – 0 = 2($3c^2$) $\Rightarrow c = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ó 8 – 0 = 2.7 (imposible)

Conclusión: f NO cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange pero, sin embargo, existe $c = \sqrt{\frac{4}{3}} \in [0,\ 2]$ que cumple f(2) – f(0) = 2f '(c)

6.- Hallar a y b para que la función f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en x = –1 y un punto de inflexión en x = 0. Una vez determinados a y b, ¿para qué valores de c dicha función tiene un cero en el intervalo [0, 1]?

Resolución

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$

Punto de inflexión en $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 6.0 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 + b$

Máximo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + b = 0 \Rightarrow b = -3$.

Conclusión: $a = 0$, $b = -3$ y $f(x) = x^3 - 3x + c$
Para la 2ª parte, $f(x) = x^3 - 3x + c$, $f'(x) = 3x^2 - 3$. Observamos que en $[0, 1]$ $f'(x) < 0$ y, por tanto f es decreciente en $[0, 1]$.

Luego, usando el teorema de Bolzano, para que f tenga un cero en el intervalo $[0, 1]$ debe ser $f(0) > 0$ y $f(1) < 0$

Sustituyendo, $0^3 - 3.0 + c > 0$ y $1^3 - 3.1 + c < 0$. Es decir, $0 < c < 2$

7.- Determinar el volumen engendrado al girar la gráfica de la función $y = xe^x$ alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 1$.

Resolución

Usando el cálculo integral, el volumen sería $V = \pi\int_0^1 \left[xe^x\right]^2 dx = \int_0^1 \pi x^2 e^{2x}\, dx$.

Para hallar una primitiva usamos el método de integración por partes,
$\left[u = \pi x^2 \; 2\pi x\, dx \;\; dv = e^{2x}\, dx \; v = \frac{1}{2}e^{2x}\right]$

$\int \pi x^2 e^{2x}\, dx = \frac{\pi x^2 e^{2x}}{2} - \int \pi x e^{2x} dx$. Otra vez por partes, $\left[u = \pi x \; \pi\, dx \;\; dv = e^{2x}\, dx \; v = \frac{1}{2}e^{2x}\right]$

$\int \pi x^2 e^{2x}\, dx = \frac{\pi x^2 e^{2x}}{2} - \frac{\pi x e^{2x}}{2} + \frac{\pi}{2}\int e^{2x} dx = \frac{\pi x e^{2x}(x-1)}{2} + \frac{\pi e^{2x}}{4} + k$.

Una primitiva es $p(x) = \frac{2\pi x e^{2x}(x-1) + \pi e^{2x}}{4} = \frac{\pi e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right)}{4}$.

Por la regla de Barrow, $V = p(1) - p(0) = \frac{\pi e^{2.1}\left(2.1^2 - 2.1 + 1\right)}{4} - \frac{\pi e^{2.0}\left(2.0^2 - 2.0 + 1\right)}{4} = \frac{\pi\left(e^2 - 1\right)}{4} \cong 5,02\ u^3$.

8.- Calcular $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{sen\, x}$

Resolución

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \left(\frac{1}{0^+}\right)^{sen\,0} = (+\ \infty)^0 \text{ Indeterm.} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln ln\left(x^{-sen\,x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[-sen\,x \ln ln\,x]}$$

$$\lim_{x\to 0^+}[-\ sen\,x \ln ln\,x] = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln ln\,x}{\frac{1}{sen\,x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ Indeterm. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[-\ln ln\,x]'}{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{sen^2\,x}coscos\,x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2\,x}{xcoscos\,x} = \frac{0}{0}$$ Indeterm. Aplicamos de nuevo la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[sen^2\,x]'}{[xcoscos\,x]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ sen\,xcoscos\,x}{coscos\,x\ - xsen\,x} = \frac{2\ sen\,0coscos\,0}{coscos\,0\ - 0sen\,0} = \frac{0}{1} = 0.$$ Luego, por L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x} = e^0 = 1$$

9.- Calcular el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 2x - 5$.

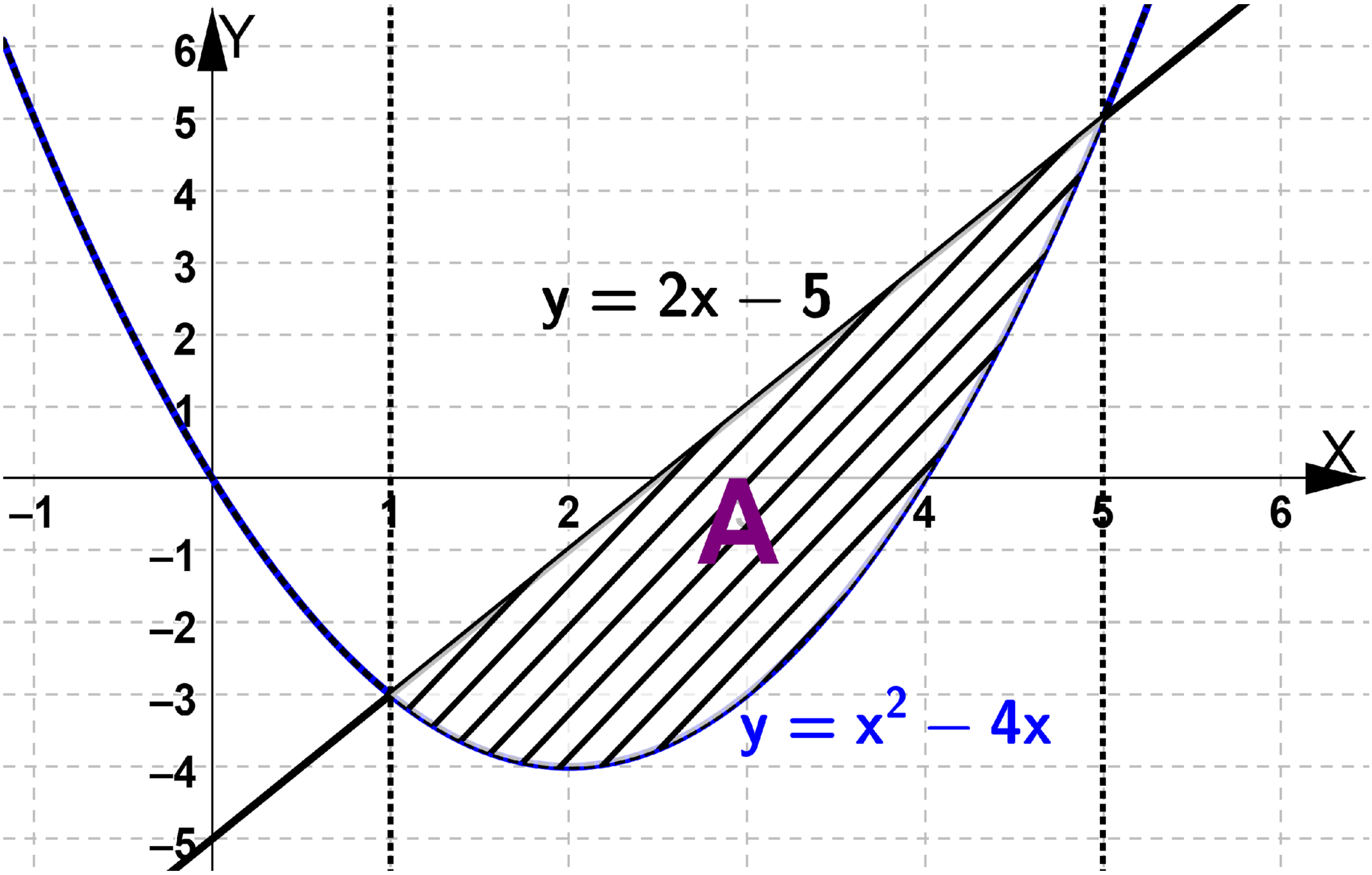
Resolución

La parábola $y = x^2 - 4x$ tiene las ramas hacía arriba, vértice $(2, -4)$ y corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

Cortes parábola/recta: $\{y = x^2 - 4x\ y = 2x - 5\ ;\ x^2 - 4x = 2x - 5\ ;\ x^2 - 6x + 5 = 0\ ;\ x = \frac{6\pm 4}{2}$, $x = 5, x = 1$

$x = 5, y = 2.5 - 5 = 5$; punto $(5, 5)$; $x = 1, y = 2.1 - 5 = -3$; punto $(1, -3)$

Un esbozo de la región sería:



El área que se pide es $A = \int_1^5 \left[2x - 5 - \left(x^2 - 4x\right)\right] dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$.

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x = \frac{9x^2 - x^3 - 15x}{3}$.

Por la regla de Barrow,

$$A = p(5) - p(1) = \frac{9.5^2 - 5^3 - 15.5}{3} - \frac{9.1^2 - 1^3 - 15.1}{3} = \frac{25}{3} - \frac{-7}{3} = \frac{32}{3} \cong 10,67\ u^2$$

10.- Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución real en el intervalo (0, 1). Enunciar los teoremas utilizados en el razonamiento.

Resolución

Vamos a probar que la ecuación tiene solución. Para ello vamos a usar teorema de Bolzano, que dice: si f es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f(c) = 0.

Tomamos $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$, para x ∈ [0, 1], que cumple
$f(0) = 2.0^3 - 6.0 + 1 = 1 > 0$ y $f(1) = 2.1^3 - 6.1 + 1 = -3 < 0$

f es continua en R por ser el resultado de operar con funciones continuas, en particular lo es en [0, 1].

Por el teorema de Bolzano existe al menos un c ∈ (0, 1) tal que f(c) = 0, es decir, $2c^3 - 6c + 1 = 0$.
Luego, c es una solución de la ecuación.

Vamos a probar que la solución es única. Para ello vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un k ∈ (a, b), tal que f´(k) = 0.

Si hubiese dos raíces, a y b, entonces f(a) = f(b) = 0 y, por el teorema de Rolle, existiría un k ∈ (a, b) tal que f´(k) = 0.

Sin embargo:
$f´(x) = 6x^2 - 6 < 0$ en el intervalo (0, 1) pues la parábola $y = 6x^2 - 6$ es convexa y corta al eje X en −1 y 1.

Conclusión: Hay una única solución real en el intervalo (0, 1).

11.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & si\ 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2}, & si\ 1 < x \le 2 \end{cases}$. Probar que esta función verifica la hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0, 2]. Determinar el valor medio (o los valores medios) dados por el teorema.

Resolución

El teorema del valor medio de Lagrange dice: Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto r ∈ (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = f´(r)(b - a)$$

Para x ≠ 1, f es continua y derivable porque las funciones polinómicas lo son.
Además, $f´(x) = \begin{cases} -2, & si\ 0 \le x < 1 \\ \frac{-2}{x^3}, & si\ 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 3 - 2.1 = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1^2} = 1 \Rightarrow \text{f es continua en x = 1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f´(x) = -2 = \lim_{x \to 1^+} f´(x) = \frac{-2}{1^3} = -2 \Rightarrow \text{f es derivable en x = 1}$$

Luego, f cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0, 2]

Hallemos c ∈ [0, 2] tal que $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c) \Rightarrow \frac{1}{2^2} - (3 - 2.0) = 2f´(c) \Rightarrow f´(c) = \frac{-11}{8} \neq -2$.

Por tanto, debe ser $\frac{-2}{c^3} = \frac{-11}{8} \Rightarrow c^3 = \frac{16}{11} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{16}{11}} \cong 0,278 \in (0,\ 2)$

12.- Calcular $\int \left(x^2 - 2ax\right) \ln ln\, x\, dx$

Resolución

Usamos el método de integración por partes,
$$\left[u = \ln ln\, x \quad \frac{1}{x}\, dx \quad dv = \left(x^2 - 2ax\right) dx \quad v = \frac{x^3}{3} - ax^2 = \frac{x^3 - 3ax^2}{3} \right]$$

$$I = \int\left(x^2 - 2ax\right) \ln ln\, x\, dx = \frac{x^3 - 3ax^2}{3}\ln ln\, x - \frac{1}{3}\int\left(x^2 - 3ax\right)dx = \frac{x^3 - 3ax^2}{3}\ln ln\, x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3ax^2}{2}\right) + k$$

$$I = \frac{x^3 - 3ax^2}{3}\ln ln\, x - \frac{2x^3 - 9ax^2}{18} + k = \frac{x^2[(6x - 18a)\ln ln\, x - 2x + 9a]}{18} + k$$

13.- Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, razonar si f(x) toma alguna vez el valor 5 cuando x varía en el intervalo [3, 4]. Encontrar la pendiente mínima que puede tener una tangente a la gráfica de f.

Resolución

Sea la función $g(x) = f(x) - 5 = x^3 - 6x^2 + 11x - 11$. Se trata de averiguar si $f(x) = 0$ siendo $x \in [3, 4]$

Vamos a usar teorema de Bolzano, que dice: Si g es continua en [a, b] y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $g(c) = 0$.

En este caso, $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 11$ (derivable en R) y $[a, b] = [3, 4]$. Se cumple:
$g(3) = 3^3 - 6.3^2 + 11.3 - 11 = -5 < 0$ y $g(4) = 4^3 - 6.4^2 + 11.4 - 11 = 1 > 0$

Luego, g cumple las hipótesis del teorema y, por tanto, f(x) toma el valor 5 en algún punto del intervalo [3, 4].

La pendiente de una tangente de la gráfica de f viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

Buscamos el mínimo de $f'(x)$. Observamos que la gráfica de f´es una parábola convexa.

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(2) = 3.2^2 - 12.2 + 11 = -1$. Es decir, la pendiente mínima es -1

14.-

a) Determinar a para que la función $f(x) = \{x^2 + ax,\ si\ x \le 1\ x \ln ln\, x,\ si\ x > 1$ sea continua.
b) Para este valor de a, ¿es también la función derivable?

Resolución

Si $x \neq 1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$f'(x) = \{2x + a,\ si\ x < 1\ 1 \ln ln\, x + x\frac{1}{x},\ si\ x > 1 = \{2x + a,\ si\ x < 1\ 1 + \ln ln\, x,\ si\ x > 1$

Como debe ser continua en $x = 1$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1^2 + a.1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1. \ln ln\, 1$

Luego, $1 + a = 0$, $a = -1$

Para $a = -1$, $f'(x) = \{2x - 1,\ si\ x < 1\ 1 + \ln ln\, x,\ si\ x > 1$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 2.1 - 1 = 1 = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 + \ln ln\, 1 = 1$ ⇒ f es derivable en $x = 1$ ⇒ f es derivable en R

c) Una vez determinado "a" calcular los máximos y mínimos relativos de la anterior función en el [0, 2].

Resolución

Sabemos que f es continua y derivable, siendo $f(x) = \{x^2 - x,\ si\ x \le 1\ x \ln ln\, x,\ si\ x > 1$,
$f'(x) = \{2x - 1,\ si\ x \le 1\ 1 + \ln ln\, x,\ si\ x > 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0, x \leq 1, \left(o\ sea\ x = \frac{1}{2}\right)$ ó $1 + \ln x = 0, x > 1$ $\left(o\ sea\ x = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1\right)$ imposible

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$ en el intervalo $[0, 2]$:

	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, 2)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	creciente	creciente

Mínimo relativo: $x = \frac{1}{2}, y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$, punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

No hay máximos relativos

15.- Usando los teoremas de Bolzano y Rolle determinar cuántos ceros tiene la función $y = x - e^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Resolución

$f(x) = x - e^{-x}$ es continua en R por ser el resultado de operar con funciones continuas.

En particular lo es en $[0, 1]$; $f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$ y $f(1) = 1 - e^{-1} \cong 0{,}632 > 0$.

Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Luego, $c - e^{-c} = 0$ y, por tanto, c es cero de la función.

El teorema de Bolzano dice: Si f es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

Tiene sólo un cero, porque por el teorema de Rolle si existiese más de uno existiría un punto d del intervalo $(0, 1)$ donde se anularía $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$.

El teorema de Rolle dice: Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $d \in (a, b)$, tal que $f'(d) = 0$.

16.- Determinar a para que se verifique $\lim_{x \to 0} \frac{x\ ln(1+x)}{1 - cos(ax)} = 8$

Resolución

$8 = \lim_{x \to 0} \frac{x\ ln(1+x)}{1 - cos(ax)} = \frac{0\ ln(1+0)}{1 - cos(a0)} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{[x\ ln(1+x)]'}{[1 - coscos\ (ax)\ ]'} = \lim_{x \to 0} \frac{lnln\ (1+x)\ + \frac{x}{1+x}}{a\ sen(ax)} = \frac{lnln\ (1+0)\ + \frac{0}{1+0}}{a\ sen(a0)} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{\left[lnln\ (1+x)\ + \frac{x}{1+x}\right]'}{[\ sen(ax)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1(1+x) - x.1}{(1+x)^2}}{a\ cos(ax)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2+x}{(1+x)^2}}{a\ cos(ax)} = \frac{\frac{2+0}{(1+0)^2}}{a\ cos(a0)} = \frac{2}{a}$.

Luego, por L´Hôpital, $8 = \frac{2}{a}$. Despejando, $a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

1989

1.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \{x, \; si\, x < 0 \; x + 1, \; si\, 0 \leq x \leq 1 \; x^2 + 1, \; si\, 1 < x$

Resolución

Para x ≠ 0, x ≠ 1 f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables, siendo $f'(x) = \{1, \; si\, x < 0 \; 1, \; si\, 0 < x < 1 \; 2x, \; si\, 1 < x$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0 + 1 = -1 \Rightarrow$ f NO es continua en x = 0 y, por tanto, tampoco derivable.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow$ f es continua en x = 1

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2.1 = 2$. Luego, NO f es derivable en x = 1

Conclusión: f sólo es derivable en R – {0 ; 1}

2.- Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x+3}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{x[1 - cos cos\,(2x)\,]}$

Resolución

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{x[1 - cos cos\,(2x)\,]} = \frac{0 - sen\, 0}{0[1 - cos cos\,(2.0)\,]} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{(x - sen\, x)'}{\{x[1 - cos cos\,(2x)\,]\}'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos cos\, x}{1 - cos cos\,(2x) + 2xsen(2x)} = \frac{1 - cos cos\, 0}{1 - cos cos\,(2.0) + 2.0sen(2.0)} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - cos cos\, x)'}{[1 - cos cos\,(2x) + 2xsen(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2sen(2x) + 2sen(2x) + 4xcos(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{4sen(2x) + 4xcos(2x)} = \frac{0}{0}$ Ind. L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{(sen\, x)'}{[4sen(2x) + 4xcos(2x)]'} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{8cos(2x) + 4cos(2x) - 8xsen(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{12cos(2x) - 8xsen(2x)} = \frac{0}{12} = 0$

Por la regla de L´Hôpital, el límite vale 0.

3.- Dada la función $f(x) = \{2, \; si\, -1 \leq x \leq 1 \; x^2 - 1, \; si\, 1 < x \leq 3$, hallar las sumas inferior y superior de la integral definida, para la partición P = {–1, 0, 1, 2, 3}. Dar una aproximación por defecto de $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$ y dar una cota del error cometido.

Resolución

Los intervalos de partición, [–1, 0], [0, 1], [1, 2] y [2, 3] tienen amplitud 1 y $x^2 - 1$ es creciente en (1, 3).

Suma inferior: s = 1.f(–1) + 1.f(0) + 1. $(1^2 - 1)$ + 1.f(2) = 2 + 2 + 0 + 2^2 – 1 = 7

Suma superior: S = 1.f(0) + 1.f(1) + 1. f(2) + 1.f(3) = 2 + 2 + 2^2 – 1 + 3^2 – 1 = 15

Como $7\leq \int_{-1}^{3} f(x)\,dx \leq 15$, una aproximación por defecto de la integral es 7 y una cota del error cometido es $15 - 7 = 8$

4.- Determinar el punto de la curva $y^2 = 4x$ cuya distancia al punto $(2, -1)$ sea mínima.

Resolución

Sea $A(2, -1)$. El punto que se busca es de la forma $P\left(\frac{y^2}{4},\ y\right)$. Se trata de minimizar la función

$$f(y) = dist^2(A,\ P) = \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{y^2-8}{4}\right)^2 + (y + 1)^2$$

$$f'(y) = 2\frac{y^2-8}{4}\,\frac{2y}{4} + 2y + 2 = \frac{y^3 - 8y + 8y + 8}{4} = \frac{y^3 + 8}{4} = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

$f''(y) = \frac{3y^2}{4}$; $f''(-2) = \frac{3(-2)^2}{4} = 3 > 0$. Luego, para $y = -2$ la distancia es mínima.

El punto que se busca es $P\left(\frac{(-2)^2}{4},\ -2\right)$. O sea, $P(1, -2)$

1988

1.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x) = \left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2$. Hallar $\int_{-5}^{0} f(x)\,dx$.

Resolución

Usando la definición de valor absoluto,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-x}{2}\right)^2, & si\ x < 0 \\ \left(\frac{x+x}{2}\right)^2, & si\ x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ x^2, & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

f es continua en R por ser composición de funciones continuas (el valor absoluto lo es)

Para $x \neq 0$, f es derivable porque las funciones polinómicas lo son. Además,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ 2x, & si\ x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2.0 = 0 \Rightarrow$ f es derivable en $x = 0$

Luego, f es continua y derivable en R. Además, $\int_{-5}^{0} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} 0\,dx = 0$

2.- Dada la función $f: [3, 6] \to R$ definida por $f(x) = x\,|x - 5|$.

a) ¿Es aplicable el teorema de Rolle? Justifica la respuesta.

Resolución

Teorema de Rolle: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$; $|x - 5| = \begin{cases} -(x-5) = 5 - x, & si\ x < 5 \\ x - 5, & si\ x\geq 5 \end{cases} \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} 5x - x^2, & si\ x < 5 \\ x^2 - 5x, & si\ x\geq 5 \end{cases}$$

f es continua en R por ser composición de funciones continuas (el valor absoluto lo es)

Si $x \neq 5$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & si\ x < 5 \\ 2x - 5, & si\ x > 5 \end{cases}$

$\lim_{x \to 5^-} f'(x) = 5.5 - 5^2 = 0 = \lim_{x \to 5^+} f'(x) = 5^2 - 5.5 = 0 \Rightarrow$ f derivable en x = 5.

Como f es continua y derivable en R, en particular es continua en [3, 6] y derivable en (3, 6).
f(3) = 3|3 – 5| = 6 ≠ f(6) = 6|6 – 5| = 6.

Luego, f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [3, 6] y, por tanto, puede aplicarse dicho teorema.

b) Determina $\int_3^6 f(x)\,dx$

Resolución

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} 5x - x^2, & si\ x < 5 \\ x^2 - 5x, & si\ x \geq 5 \end{cases}$.

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración,

$$\int_3^6 f(x)\,dx = \int_3^5 (5x - x^2)\,dx + \int_5^6 (x^2 - 5x)\,dx = \int_3^5 (5x - x^2)\,dx - \int_5^6 (5x - x^2)\,dx$$

Una primitiva de $5x - x^2$ es $p(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{15x^2 - 2x^3}{6}$. Por la regla de Barrow,

$$\int_3^6 f(x)\,dx = p(5) - p(3) - [p(6) - p(5)] = 2p(5) - p(3) - p(6) =$$

$$= 2\frac{15.5^2 - 2.5^3}{6} - \frac{15.3^2 - 2.3^3}{6} - \frac{15.6^2 - 2.6^3}{6} = 2\frac{125}{6} - \frac{81}{6} - \frac{108}{6} = \frac{61}{6} \cong 10,17$$

1987

1.- Calcular $\int_{-2}^{4} |x^2 - 3x + 2|\,dx$

Resolución

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2},\ x = 2,\ x = 1.$

Luego, la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ es convexa y corta al eje X en 1 y 2

$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$;
$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} -x^2 + 3x - 2, & si\ 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2, & si\ x \leq 1 \ \text{ ó } \ x \geq 2 \end{cases}$

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración,

$$\int_{-2}^{4} \left|x^2 - 3x + 2\right| dx = \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 3x + 2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(-x^2 + 3x - 2\right) dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 3x + 2)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{1}\left(x^2 - 3x + 2\right)dx - \int_{1}^{2}\left(x^2 - 3x + 2\right)dx + \int_{2}^{4}(x^2 - 3x + 2)\, dx$$

Una primitiva de $x^2 - 3x + 2$ es $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x = \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x}{6}$. Por la regla de Barrow,

$$\int_{-2}^{4}\left|x^2 - 3x + 2\right|dx = p(1) - p(-2) - [p(2) - p(1)] + p(4) - p(2) = 2p(1) - p(-2) - 2p(2) + p(4) =$$

$$= 2\frac{2.1^3 - 9.1^2 + 12.1}{6} - \frac{2(-2)^3 - 9(-2)^2 + 12(-2)}{6} - 2\frac{2.2^3 - 9.2^2 + 12.2}{6} + \frac{2.4^3 - 9.4^2 + 12.4}{6} =$$

$$= 2\frac{5}{6} - \frac{-76}{6} - 2\frac{4}{6} + \frac{32}{6} = \frac{110}{6} = \frac{55}{3} \cong 18,33$$

2.- Calcular el área encerrada por las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 8 - 2x^2$.

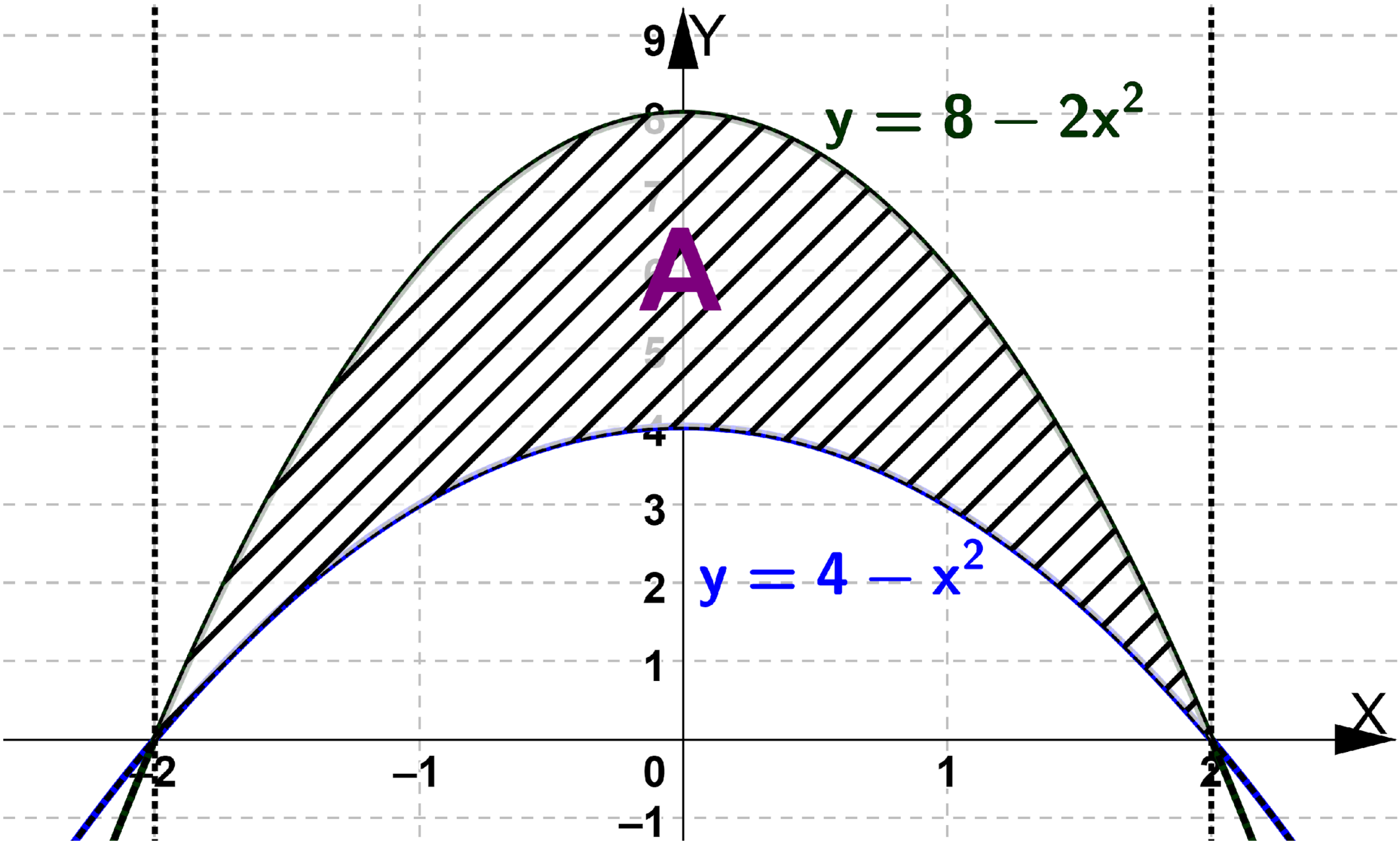
Resolución

La parábola $y = 4 - x^2$ tiene las ramas hacía abajo, vértice (0, 4) y corta al eje X en (–2, 0) y (2, 0).

La parábola $y = 8 - 2x^2$ tiene las ramas hacía abajo, vértice (0, 8) y corta al eje X en (–2, 0) y (2, 0).

Cortes entre las parábolas: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 8 - 2x^2 \end{cases}$; $4 - x^2 = 8 - 2x^2$; $x^2 = 4$; $x = -2$, $x = 2$; (–2, 0) y (2, 0).

Un esbozo de la región cuya área se pide sería:



Por simetría, el área que se pide es $A = 2\int_0^2 \left[8 - 2x^2 - \left(4 - x^2\right)\right] dx = \int_0^2 \left(8 - 2x^2\right) dx$.

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = 8x - \frac{2x^3}{3} = \frac{24x - 2x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(2) - p(0) = \frac{24.2 - 2.2^3}{3} - \frac{24.0 - 2.0^3}{3} = \frac{32}{3} \cong 10,67\ u^2$

3.- Estudiar el campo de derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{2}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$

Resolución

Usando la definición de valor absoluto, $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2}, & si\ x < 0 \\ 0, & si\ x = 0 \\ \frac{x}{2}, & si\ x > 0 \end{cases}$

Para x ≠ 0, f es continua y derivable porque las funciones polinómicas lo son.

Además, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2}, & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}, & si\ x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0}{2} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{0}{2} = 0 = f(0) = 0 \Rightarrow$ f es continua en x = 0

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{-1}{2} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 0

Luego, f sólo es derivable en $R - \{0\}$

4.- Halla el área encerrada por las curvas $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + 2x$.

Resolución

La parábola $y = x^2 - 3x + 2$ tiene las ramas hacía arriba, vértice $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$ y corta al eje X en (1, 0) y (2, 0).

La parábola $y = -x^2 + 2x$ tiene las ramas hacía abajo, vértice (1, 1) y corta a los ejes en (0, 0) y (2, 0).

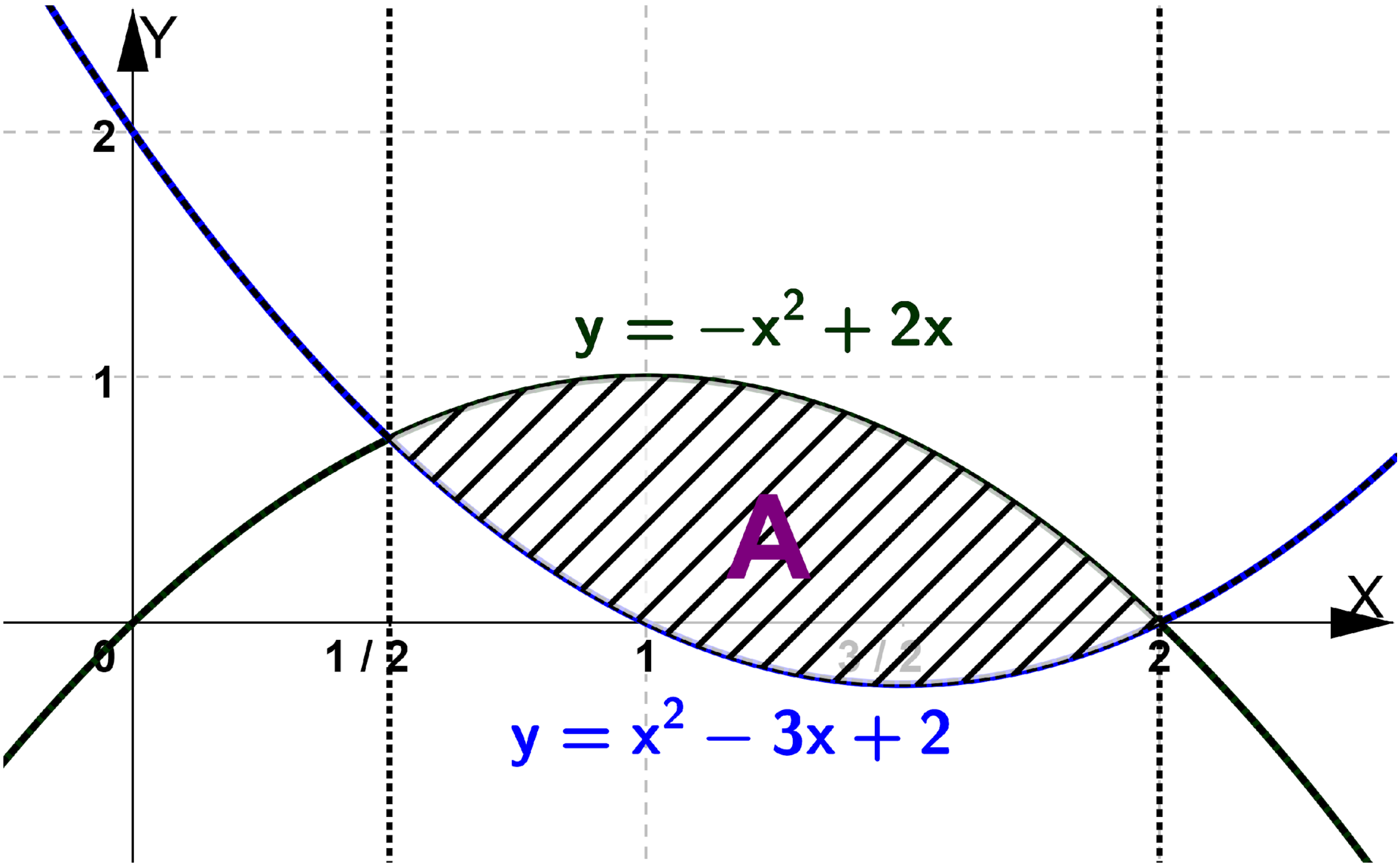
Cortes entre las parábolas: $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$; $x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 2x$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x = \frac{5 \pm 3}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$

$x = \frac{1}{2}$, $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$x = 2$, $y = -2^2 + 2.2 = 0$; punto $(2, 0)$

Un esbozo de la región cuya área se pide sería:



El área que se pide es $A = \int_{1/2}^{2} \left[- x^2 + 2x - \left(x^2 - 3x + 2\right)\right] dx = \int_{1/2}^{2} \left(- 2x^2 + 5x - 2\right) dx$.

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = \frac{-2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x = \frac{-4x^3 + 15x^2 - 12x}{6}$. Por Barrow,

$$A = p(2) - p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4.2^3 + 15.2^2 - 12.2}{6} - \frac{-4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{2}}{6} = \frac{4}{6} - \frac{\frac{-11}{4}}{6} = \frac{9}{8} = 1,125\ u^2$$

1986

1.- Hallar

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^3}$

Resolución

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^3} = \frac{sen\, 0 - 0}{0^3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{(sen\, x - x)´}{(x^3)´} = \lim_{x \to 0} \frac{coscos\, x - 1}{3x^2} = \frac{coscos\, 0 - 1}{3.0^2} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim_{x \to 0} \frac{(coscos\, x - 1)´}{(3x^2)´} = \lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x}{6x} = \frac{-sen\, 0}{6.0} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{(-sen\, x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-cos\, x}{6} = \frac{-cos\, 0}{6} = \frac{-1}{6}$. Por la regla de L´Hôpital, el límite vale $\frac{-1}{6}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen\, x}{2^x + cos\, x}$

Resolución

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen\, x}{2^x + cos\, x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen\, x}{e^{x\ln 2} + cos\, x}$. Dividimos entre $e^{x\ln 2}$ y queda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{e^{x\ln 2}} + \frac{sen\, x}{e^{x\ln 2}}}{\frac{e^{x\ln 2}}{e^{x\ln 2}} + \frac{cos\, x}{e^{x\ln 2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x(1-\ln 2)} + \frac{sen\, x}{e^{x\ln 2}}}{1 + \frac{cos\, x}{e^{x\ln 2}}} = \frac{\infty + 0}{1+0} = \infty$$

2.- Calcular la integral $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1|\, dx$

Resolución

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 1$. Luego, la parábola $y = x^2 - 1$ es convexa y corta al eje X en -1 y 1

$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$; $|x^2 - 1| = \{1 - x^2, si\ -1 < x < 1\ \ x^2 - 1, si\ x \leq -1\ \ ó\ \ x \geq 1$

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración,

$$\int_{-1}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx = \int_{1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right) dx$$

Una primitiva de $x^2 - 1$ es $p(x) = \frac{x^3}{3} - x = \frac{x^3 - 3x}{3}$. Por la regla de Barrow,

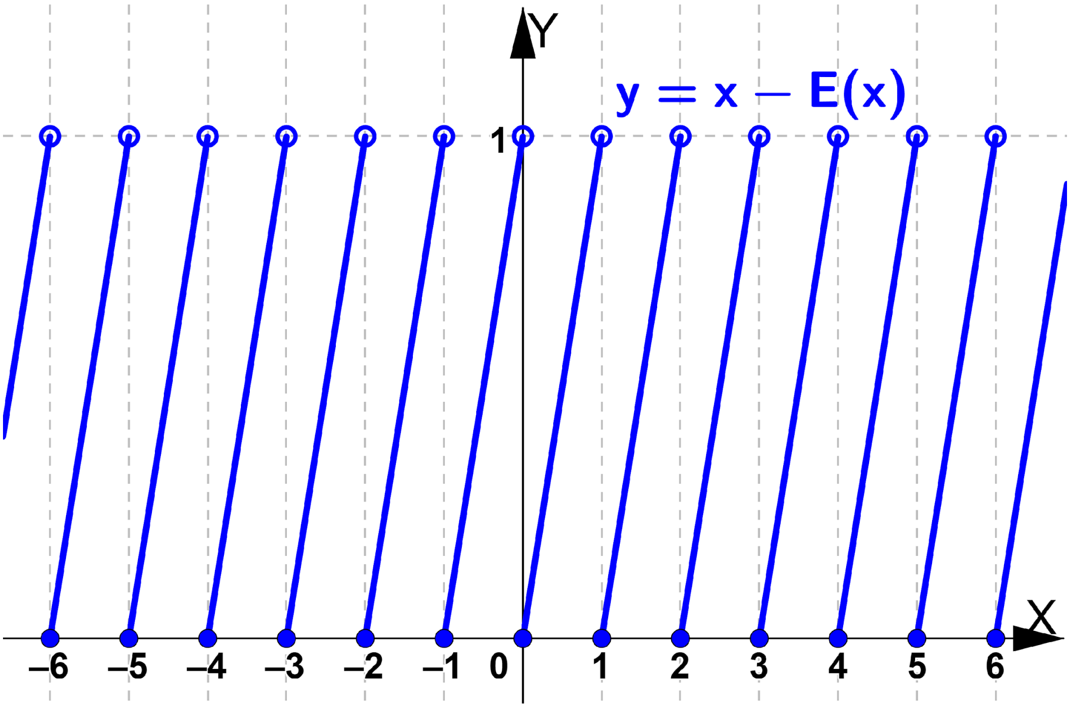
$$\int_{-1}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx = p(2) - p(1) - [p(1) - p(-1)] = p(2) - 2p(1) + p(-1) =$$

$$= \frac{2^3 - 3.2}{3} - 2\frac{1^3 - 3.1}{3} + \frac{(-1)^3 - 3(-1)}{3} = \frac{2}{3} - 2\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \cong 2,67$$

1985

1.- Representar gráficamente y estudiar los puntos de discontinuidad de la función f(x) = x – E(x) para todo x ∈ R, siendo E(x) la parte entera de x.

Resolución



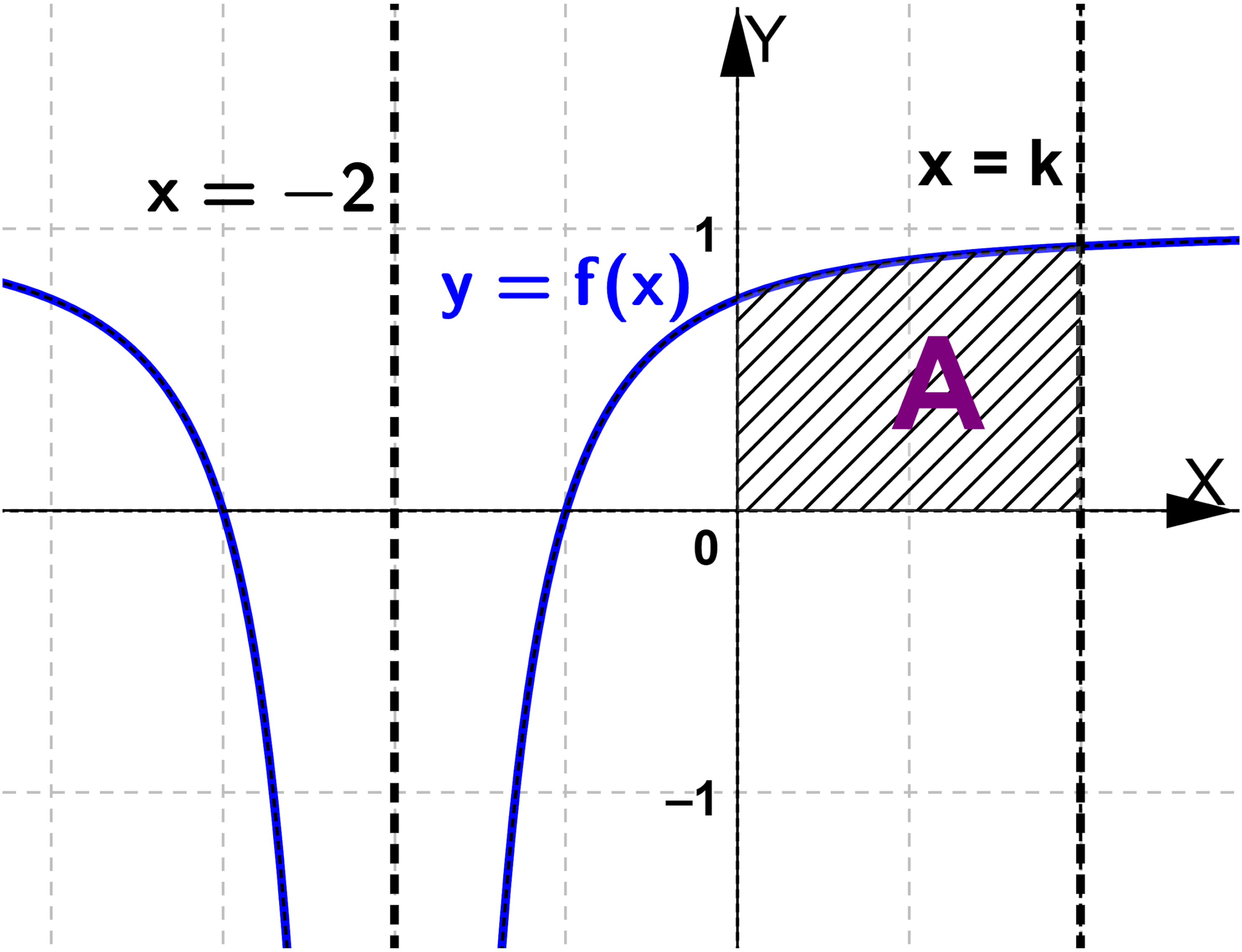
F tiene discontinuidad de salto finito igual a 1 en todos los valores x ∈ Z (números enteros)

1984

1.- Hallar un valor positivo de k para que el área comprendida entre la curva $y = \frac{x^2+4x+3}{x^2+4x+4}$, la parte positiva del eje de ordenadas, el eje X y la recta x = k, sea $\frac{7}{4}$.

Resolución

Sea $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+4x+4}$. Un esbozo del recinto sería:



Según el enunciado, $\frac{7}{4} = \int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k \frac{x^2+4x+3}{x^2+4x+4}\,dx$.

La forma mixta de la fracción es $\frac{x^2+4x+3}{x^2+4x+4} = 1 + \frac{-1}{x^2+4x+4} = 1 + \frac{-1}{(x+2)^2}$

Luego una primitiva de f es $F(x) = x + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+2x+1}{x+2} = \frac{(x+1)^2}{x+2}$. Por la regla de Barrow,

$\frac{7}{4} = F(k) - F(0) = \frac{(k+1)^2}{k+2} - \frac{(0+1)^2}{0+2} = \frac{(k+1)^2}{k+2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{(k+1)^2}{k+2} \Rightarrow 4\left(k^2 + 2k + 1\right) = 9k + 18$

Queda $4k^2 - k - 14 = 0$; $k = \frac{1 \pm 15}{8}$ y como k es positivo entonces k = 2

2.- Hallar

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - tg\,x}{sen\,x - x}$

Resolución

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - tg\,x}{sen\,x - x} = \dfrac{0 - tg\,0}{sen\,0 - 0} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - tg\,x)´}{(sen\,x - x)´} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1+tg^2x)}{coscos\,x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-tg^2x}{coscos\,x - 1} = \dfrac{-tg^2 0}{coscos\,0 - 1} = \dfrac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-tg^2x)´}{(coscos\,x - 1)´} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-2tg\,x)(1+tg^2x)}{-sen\,x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{0} = 2$. Por la regla de L´Hôpital, el límite vale 2

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - sen\,x}{3x}$

Resolución

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - sen\,x}{3x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{3}\left[1 - (sen\,x)\dfrac{1}{x}\right] = \dfrac{1}{3}(1 - 0) = \dfrac{1}{3}$

Se ha usado que $\lim\limits_{x\to \infty}\left(sen\,x\dfrac{1}{x}\right) = 0$ porque sen es una función acotada y $\dfrac{1}{x}$ tiende a 0 en el infinito

1982

1.- Calcular el polinomio de Taylor de la función f: R → R con $f(x) = e^{2x}$ en un entorno del punto x = 1, hasta el término de quinto orden e indicar la expresión del resto de Lagrange correspondiente al último término.

Resolución

El polinomio de Taylor de orden n de una función f en un entorno de un punto a donde es n veces derivable es $p_n(x) = f(a) + f´(a)(x - a) + \frac{f´´(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f´´´(a)}{3!}(x - a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$

y el resto de Lagrange es $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ siendo c un valor comprendido entre a y x

Se sabe también que $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$

En nuestro caso, $f(x) = e^{2x}$, a = 1, n = 5. Sustituyendo,

$$p_5(x) = f(1) + f´(1)(x - 1) + \frac{f´´(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f´´´(1)}{3!}(x - a)^3 + \frac{f^{iv}(1)}{4!}(x - 1)^4 + \frac{f^{v}(1)}{5!}(x - 1)^5$$

$$R_5(x) = \frac{f^{vi}(c)}{6!}(x - 1)^6$$

Observa que $f´(x) = 2e^{2x}$; $f´´(x) = 2^2e^{2x}$; $f´´´(x) = 2^3e^{2x}$ .... $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, luego

$$p_5(x) = e^2 + 2e^2(x - 1) + \frac{2^2e^4}{2}(x - 1)^2 + \frac{2^3e^6}{6}(x - 1)^3 + \frac{2^4e^8}{24}(x - 1)^4 + \frac{2^5e^{10}}{120}(x - 1)^5$$

$$p_5(x) = e^2 + 2e^2(x - 1) + 2e^4(x - 1)^2 + \frac{4e^6}{3}(x - 1)^3 + \frac{2e^8}{3}(x - 1)^4 + \frac{4e^{10}}{15}(x - 1)^5$$

El resto es $R_5(x) = \frac{2^6 e^{2c}}{720}(x - 1)^6$

2.- Calcular $\int_{-3}^{5} |x - 2|\, dx$

Resolución

$|x - 2| = \{2 - x, si\ x < 2\ \ x - 2, si\ x \geq 2$. Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración, $\int_{-3}^{5} |x - 2|\, dx = \int_{-3}^{2} (2 - x)dx + \int_{2}^{5} (x - 2)dx = \int_{2}^{5} (x - 2)dx - \int_{-3}^{2} (x - 2)dx$

Una primitiva de $x - 2$ es $p(x) = \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{x^2 - 4x}{2}$. Por la regla de Barrow,

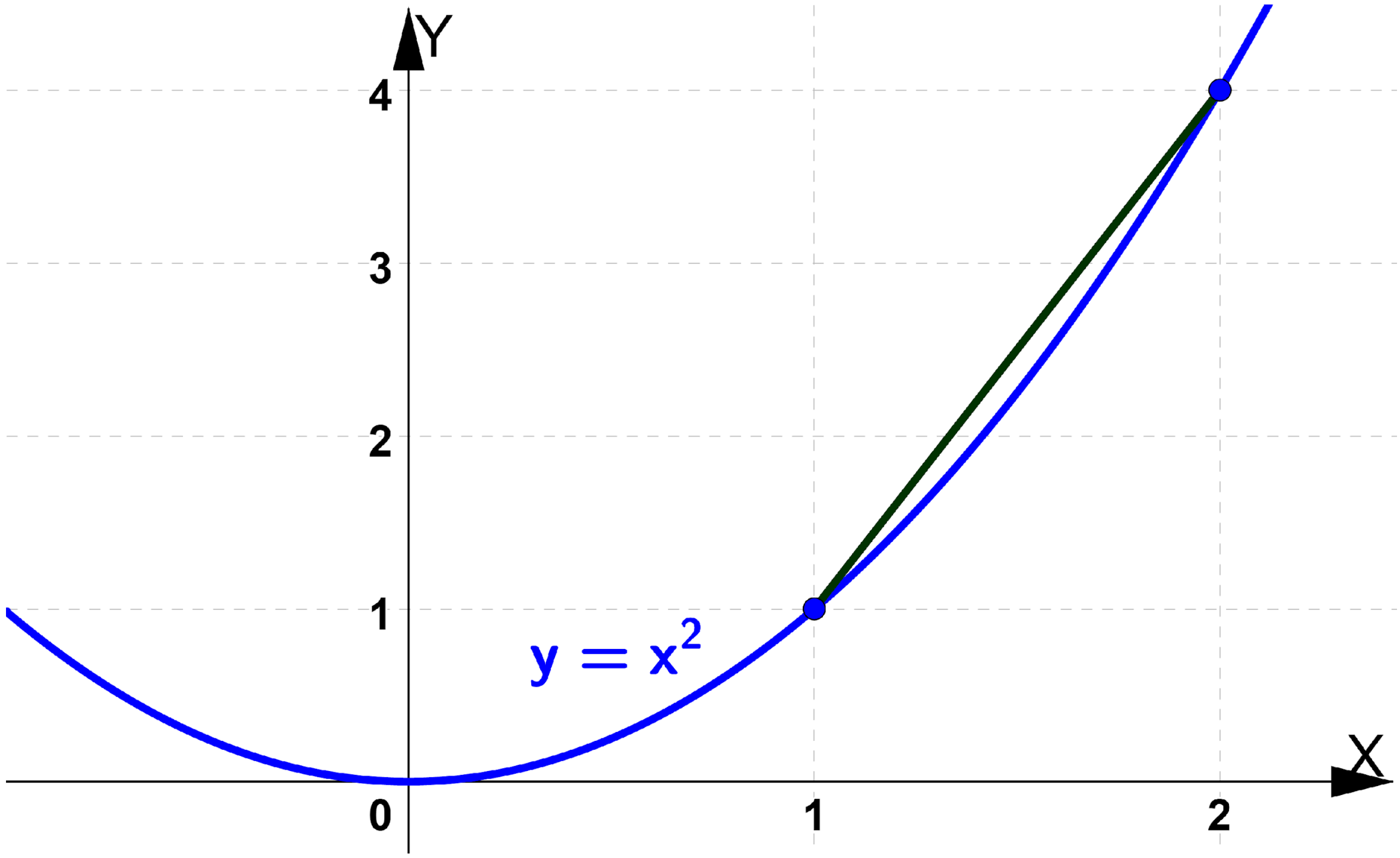
$\int_{-3}^{5} |x - 2|\, dx = p(5) - p(2) - [p(2) - p(-3)] = p(5) - 2p(2) + p(-3) =$

$= \frac{5^2 - 4.5}{2} - 2\frac{2^2 - 4.2}{2} + \frac{(-3)^2 - 4(-3)}{2} = \frac{5}{2} - 2(-2) + \frac{21}{2} = 17$

3.- Dada la parábola de ecuación $y = x^2$ halla las coordenadas de un punto de la curva cuya tangente en él sea paralela a la cuerda de extremos (1, 1) y (2, 4). Representar la figura. ¿Tiene esto algo que ver con algún teorema conocido? En caso afirmativo enúnciese.

Resolución

El punto que se busca es de la forma $P(x, x^2)$. La pendiente de la curva en P es 2x y la pendiente de la cuerda es $\frac{4-1}{2-1} = 3$. Luego, $2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. El punto de la curva es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$



Esto es consecuencia del teorema del valor medio de Lagrange, que dice: Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos un punto r ∈ (a, b) tal que $f(b) - f(a) = f'(r)(b - a)$

Geométricamente significa que hay al menos un c ∈ (a, b) (punto de la gráfica P(c, f(c)) tal que la recta tangente en x = c es paralela a la recta que pasa por A y B, siendo A(a, f(a)) y B(b, f(b)).

4.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x \geq 1 \\ \frac{x}{1-x}, & si\ x < 1 \end{cases}$ y g(x) = |x|

Resolución

Para x ≠ 1 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables, siendo $f'(x) = \begin{cases} 2x, & si\ x > 1 \\ \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, & si\ x < 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ f NO es continua en x = 1 y, por tanto, tampoco derivable. Conclusión: f sólo es continua y derivable en R – {1}

g es continua en R por serlo la función valor absoluto. Usando la definición de valor absoluto
$g(x) = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$
Para x ≠ 0, g es derivable porque las funciones polinómicas lo son, siendo
$g'(x) = \begin{cases} -1, & si\ x < 0 \\ 1, & si\ x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} g'(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} g'(x) = 1 \Rightarrow$ g NO es derivable en x = 0

Conclusión: g continua en R y sólo es derivable en R – {0}

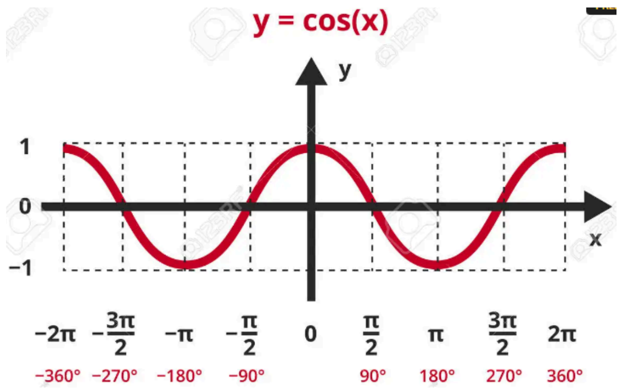
1981

1.- Calcula $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\cos x\, dx$ y $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos\cos x\,|\, dx$

Resolución

$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$. Por simetría $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} x\, dx = \int_{0}^{1} 2x\, dx$

Una primitiva de $2x$ es $p(x) = x^2$. Por la regla de Barrow, $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = p(1) - p(0) = 1^2 - 0^2 = 1$



Una primitiva de cos x es sen x. Por Barrow, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\cos x\, dx = sen\,\pi - sen(-\pi) = -1 - (-1) = 0$

En el intervalo $[-\pi, \pi]$,

$|\cos\cos x\,| = \begin{cases} -\cos\cos x\,, & si\ -\pi \leq x < \frac{-\pi}{2} \ \ ó \ \ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ \cos\cos x\,, & si\ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos\cos x\,|\, dx = \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-\cos\cos x\,)\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\cos x\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos\cos x\,)\, dx$. Por Barrow, la integral vale

$-sen\left(\frac{-\pi}{2}\right) - sen(-\pi) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{-\pi}{2}\right) - sen\,\pi + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 + 1 + 1 - 0 + 1 = 4$

2.- Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{x - tg\,x}{x^3 - x^4}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x + sen\,x}{x + \cos\cos x}$

Resolución

$\lim_{x\to 0} \frac{x - tg\,x}{x^3 - x^4} = \frac{0 - tg\,0}{0^3 - 0^4} = \frac{0}{0}$ Indeterminación. Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{(x - tg\,x)'}{(x^3 - x^4)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + tg^2x)}{3x^2 - 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-tg^2x}{3x^2 - 4x^3} = \frac{-tg^2 0}{3.0^2 - 4.0^3} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{(-tg^2x)'}{(3x^2 - 4x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2tg\,x(1 + tg^2x)}{6x - 12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2tg\,x - 2tg^3x}{6x - 12x^2} = \frac{0}{0}$ Indeterm. Otra vez L´Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{\left(-2tg\,x - 2tg^3x\right)'}{(6x - 12x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\left(1 + tg^2x\right) - 6tg^2x(1 + tg^2x)}{6 - 24x} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

Por la regla de L´Hôpital, el límite vale $\frac{-1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+sen\,x}{x\,+coscos\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{sen\,x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{sen\,x}{x}}{1\,+\frac{x}{x}} = \frac{1+0}{1\,+0} = 1$$

3.- Se considera la curva de ecuación $y\,=|x\,+\,3\;1\;2\;x\,+\,3\;x\;1\;x\,+\,3\;2\;x\,|$, hallar:

a) Intersección de la curva con el eje OX.

Resolución

$y\,=|x\,+\,3\;1\;2\;x\,+\,3\;x\;1\;x\,+\,3\;2\;x\,|=(x\,+\,3)|1\;1\;2\;1\;x\;1\;1\;2\;x|\quad f2\,-\,f1\;\;f3\,-\,f1\quad (x\,+\,3$

Operando, la ecuación de la curva es $y = (x + 3)(x^2 - 3x + 3)$

$y = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ó $x^2\,-\,3x\,+\,3\,=\,0,\;\; x\,=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$, *imposible* . La curva sólo corta a OX en $(-3, 0)$

b) Ecuación de la recta tangente en el punto de intersección del apartado anterior.

Resolución

Sea $f(x) = (x + 3)(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3x^2 - 9x + 9 = x^3 - 6x + 9$; $f'(x) = 3x^2 - 6$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = -\,3$; $f'\left(x_0\right) = f'(-\,3) = 3.(-\,3)^2\,-\,6\,=\,21$

$f\left(x_0\right) = f(-\,3) = 0$. La recta tangente es $rtg\!: y\,=\,21(x\,+\,3) +\,0$; $rtg\!: y\,=\,21x\,+\,63$

c) Intersección de la recta tangente y la curva.

Resolución

Cortes entre la tg y la curva: $\{y\,=\,(x\,+\,3)(x^2\,-\,3x\,+\,3)\;y\,=\,21(x\,+\,3)$;
$(x\,+\,3)(x^2\,-\,3x\,+\,3)\,=\,21(x\,+\,3)$

$(x\,+\,3)\left(x^2\,-\,3x\,+\,3\right) - 21(x\,+\,3) = 0 \Rightarrow (x\,+\,3)\left(x^2\,-\,3x\,-\,18\right) = 0 \Rightarrow x = -3, x\,=\frac{3\pm 9}{2}, x =-\,3$, $x = 6$

$x = -3,\;\; y = 0$ punto $(-3, 0)$; $x = 6,\;\; y = 21(6 + 3) = 189$ punto $(6, 189)$

4.- Hallar el área del recinto comprendido entre las curvas $\{y\,=\,x^3\,-\,x\;y\,=\,x^2\,-\,1$

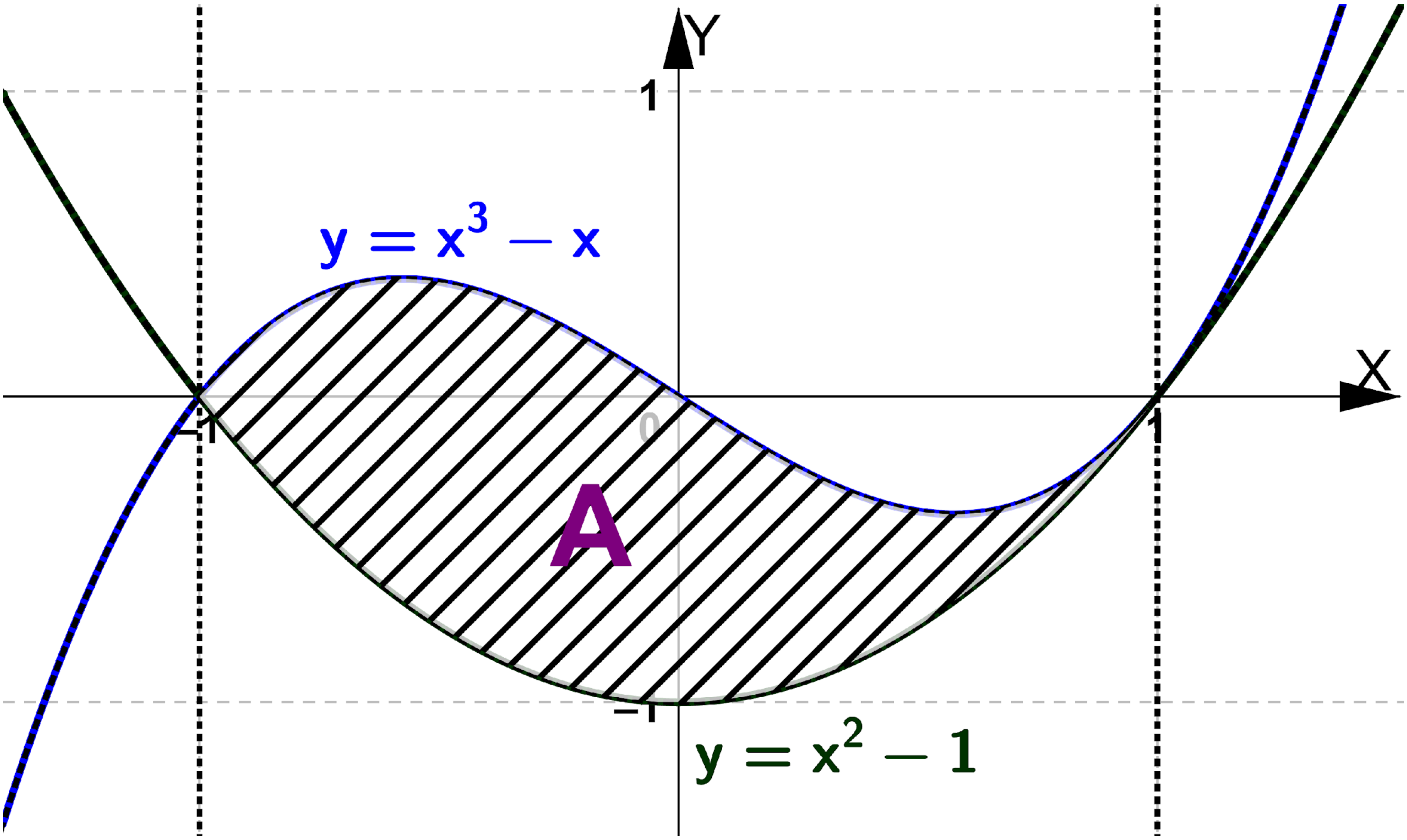
Resolución

Cortes entre las curvas: $\{y\,=\,x^3\,-\,x\;y\,=\,x^2\,-\,1$; $x^3\,-\,x\,=\,x^2\,-\,1$; $x^3\,-\,x^2\,-\,x\,+\,1\,=\,0$

Usamos la regla de Ruffini: $1\;\;-\,1\;\;-\,1\,1\,1\,\downarrow\,1\,0\;\;-\,1\;\;1\,0\;\;-\,1\,0$ Nos queda $(x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)^2(x + 1) = 0$

$x\,=\,1,\; y\,=\,1^2\,-\,1\,=\,0$; punto $(1,\,0)$; $x\,=-\,1,\; y\,=\,(-\,1)^2\,-\,1\,=\,0$; punto $(-\,1,\,0)$

Un esbozo de la región cuya área se pide sería:



El área que se pide es $A = \int_{-1}^{1} \left[x^3 - x - \left(x^2 - 1\right)\right] dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) dx$.

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x = \frac{3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x}{12}$. Por Barrow,

$$A = p(1) - p(-1) = \frac{3.1^4 - 4.1^3 - 6.1^2 + 12.1}{12} - \frac{3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 6(-1)^2 + 12(-1)}{12} = \frac{5}{12} - \frac{-11}{12} = \frac{16}{12}$$

5.- Dada la familia de parábolas $y = (m + 3)x^2 - (2m - 1)x + (m - 1)$, donde m es un parámetro variable. Demostrar que todas las parábolas de la familia pasan por un punto fijo, y tienen en él la misma recta tangente. Encontrar las coordenadas de este punto y la ecuación de dicha recta tangente.

Resolución

Como para $(m + 3) - (2m - 1) + (m - 1) = 3$, resulta que para $x = 1$,
$y = (m + 3)1^2 - (2m - 1)1 + (m - 1) = 3$. Luego, todas las parábolas de la familia pasan por $P(1, 3)$

Veamos cuál es la recta tangente en el punto $P(1, 3)$:

Sea $f(x) = (m + 3)x^2 - (2m - 1)x + (m - 1)$, $f'(x) = (2m + 6)x - 2m + 1$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$; $f(x_0) = f(1) = 3$

$f'(x_0) = f'(1) = (2m + 6)1 - 2m + 1 = 7$. Luego, la recta tangente de cualquier parábola de la familia

en el punto P(1, 3) es $rtg: y = 7(x - 1) + 3$; $rtg: y = 7x - 4$

6.- Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen\, x}{e^x + cos\, x}$

Resolución $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + sen\, x}{e^x + cos\, x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x} + \frac{sen\, x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{cos\, x}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{sen\, x}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

1980

1.- Hallar $e^{0,1}$ empleando los tres primeros sumandos del desarrollo de Taylor-McLaurin de $f(x) = e^x$. Calcular cuantas cifras exactas tiene la respuesta.

Resolución

El polinomio de Taylor de orden n de una función f en un entorno de un punto a donde es n veces derivable es $p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$

y el resto de Lagrange es $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ siendo c un valor comprendido entre a y x

Se sabe también que $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$

Tomemos, $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n = 2$. Observa que $f'(x) = f''(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$. Sustituyendo,

$f(x) = p_2(x) + R_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{e^c}{6}x^3$

Para $x = 0{,}1$, $e^{0,1} = f(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{1}{2}0,1^2 + \frac{e^c}{6}0,1^3 = 1,105 + \frac{10^{-3}e^c}{6}$, con $0 < c < 0{,}1$

Tiene 4 cifras exactas

2.- La función $f(x) = 1 + |x|$ es continua en $[-2, 2]$ y además $f(-2) = f(2) = 3$, ¿puede concluirse que existe un punto $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$? ¿Está de acuerdo la respuesta con el Teorema de Rolle? Hallar $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

Resolución

Para la primera parte usando el teorema de Rolle, que dice si f es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$, no puede concluirse que exista un punto $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$ porque f no es derivable en $x = 0$

Para la 2ª parte, $f(x) = 1 + |x| = \{1 - x, si\ x < 0 \ \ 1 + x, si\ x \geq 0$. Por la propiedad de aditividad de la integral definida

respecto al intervalo de integración, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (1 - x)dx + \int_{0}^{2} (1 + x)dx$

Una primitiva de $1 - x$ es $p(x) = x - \frac{x^2}{2} = \frac{2x - x^2}{2}$ y de $1 + x$ es $q(x) = x + \frac{x^2}{2} = \frac{2x + x^2}{2}$. Por Barrow,

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = p(0) - p(-2) + q(2) - q(0) = \frac{2.0 - 0^2}{2} - \frac{2(-2) - (-2)^2}{2} + \frac{2.2 + 2^2}{2} - \frac{2.0 + 0^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

3.- Halla los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{|x-3|}{1+|x|}$

Resolución

f es continua en R por ser cociente de funciones continuas (el valor absoluto lo es) y no anularse el denominador.
Vamos a expresar f como función definida a trozos. Observa que $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$[0, 3)$	$[3, +\infty)$
f(x)	$\frac{3-x}{1-x}$	$\frac{3-x}{1+x}$	$\frac{x-3}{1+x}$

$f(x) = \{\frac{3-x}{1-x},\ si\ x < 0\ \ \frac{3-x}{1+x},\ si\ 0 \le x < 3\ \ \frac{x-3}{1+x},\ si\ x \ge 3$

Si $x \neq 0, x \neq 3$,

$f'(x) = \{\frac{-1(1-x) - (3-x)(-1)}{(1-x)^2},\ si\ x < 0\ \ \frac{-1(1+x) - (3-x)1}{(1+x)^2},\ si\ 0 < x < 3\ \ \frac{1(1+x) - (x-3)1}{(1+x)^2},\ si\ x > 3\ = \{\frac{2}{(1-x}$

; vemos que $f'(x) \neq 0$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f´(x)	+	$\nexists$	–	$\nexists$	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Máximo local: $x = 0,\ y = f(0) = \frac{|0-3|}{1+|0|} = 3$, punto $(0, 3)$.

Mínimo local: $x = 3,\ y = f(3) = \frac{|3-3|}{1+|3|} = 0$, punto $(3, 0)$.

4.- ¿Tienen primitiva todas las funciones continuas? Obtener, si existe, una primitiva para cada una de las funciones siguientes: $f_1(x) = e^{-x}$; $f_2(x) = e^{-x^2}$ y $f_3(x) = |x|$.

Resolución

Según el teorema fundamental del cálculo integral toda función, f, continua en un intervalo tiene primitiva dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ siendo a un punto del intervalo. Aunque no siempre la primitiva se pueda expresar en términos de funciones elementales. Además cada función continua tiene infinitas primitivas que se diferencia en una constante.

Una primitiva de f_1 es, por ejemplo, $F_1(x) = -e^{-x}$; de f_2 es, por ejemplo, $F_2(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Como $f_3(x) = |x| = \{-x, si\ x < 0\ \ x, si\ x \ge 0$, una primitiva es, por ejemplo,

$F_3(x) = \{\frac{-x^2}{2}, si\ x < 0\ \ \frac{x^2}{2}, si\ x \ge 0$

5.- Calcular $\int arctg\, x dx$

Resolución

Usamos la integración por partes:

$\left[u = arctg\, x \frac{1}{1+x^2} dx \; dv = dx \; v = x\right]$;

$\int arctg\, x\, dx = xx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xx - \frac{1}{2} \ln ln\left(1 + x^2\right) + k.$

1979

1.- Hallar una primitiva de $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

Resolución

$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} e^x dx$. Usamos la integración por cambio de variable: $t = e^x$, $dt = e^x dx$

Queda

$\int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln ln\,(1 + t) + k = e^x - \ln ln\left(1 + e^x\right) + k$

Por tanto, una primitiva de f es $F(x) = e^x - \ln ln\left(1 + e^x\right)$

2.- Sea $f(x) = \{x^2, \; si\, x \geq 2 \; cx + 3, \; si\, x < 2$. Hallar c para que f(x) sea continua en x = 2.

Resolución

Si x ≠ 2, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas

Como debe ser continua en x = 2, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = c2 + 3 = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 2^2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

3.- Calcular $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

Resolución

Usamos la integración por cambio de variable: $\frac{1-x}{1+x} = t^2$; $1 - x = t^2 + xt^2$; $1 - t^2 = x(1 + t^2)$

Luego, $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-2t-1}{(1+t^2)^2} dt$

Queda $\int \sqrt{t^2} \frac{-2t-1}{(1+t^2)^2} dt = \int t \frac{-2t-1}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{-2t^2-t}{(t^2+1)^2} dt$

Como el denominador tiene raíz compleja de multiplicidad 2, descomponemos la fracción por el método de Hermite: $\frac{-2t^2-t}{(1+t^2)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{at+b}{t^2+1}\right) + \frac{mt+n}{t^2+1} = \frac{a(t^2+1)-(at+b)2t}{(t^2+1)^2} + \frac{mt+n}{t^2+1} = \frac{a-2bt-at^2}{(t^2+1)^2} + \frac{mt+n}{t^2+1}$

Multiplicando los dos miembros por $(t^2 + 1)^2$ se obtiene: $-2t^2 - t = a - 2bt - at^2 + (mt + n)(t^2 + 1)$

$-2t^2 - t = a - 2bt - at^2 + mt^3 + nt^2 + mt + n \Rightarrow mt^3 + (n - a)t^2 + (m - 2b)t + (a + n - 2) = 0$

Por tanto,

$\{m = 0\ n - a = -2\ m - 2b = -1\ a + n - 2 = 0 \Rightarrow \{n = a - 2\ 0 - 2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}\ a + n - 2 = 0$
$;\ n = 1 - 2 = -1$

Resumen: $a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ m = 0,\ n = -1$. Queda $\frac{-2t^2 - t}{\left(1 + t^2\right)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t + 1/2}{t^2 + 1}\right) - \frac{1}{t^2 + 1}$.

Luego, $\int \frac{-2t^2 - t}{\left(t^2 + 1\right)^2} dt = \frac{t + \frac{1}{2}}{t^2 + 1} - arctg\ t + k = \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}}{\frac{1-x}{1+x} + 1} - arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + k$

4.- Hallar las asíntotas de la curva $y = x\ e^{-x}$.

Resolución

Como f es continua (y derivable) en R, no hay asíntotas verticales.

$f(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ Indeterminación. Aunque la indeterminación se puede resolver

aplicando la regla de L´Hôpital, podemos deducir que el límite es 0 porque cuando x tiende a $+\infty$, e^x es un infinito de orden superior al de x.

Luego, la A.H. en $+\infty$ es A.H. : $y = 0$ (eje X) ; $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{x}{e^x} - 0 = \frac{x}{e^x}$.

$Si\ x \to +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en $+\infty$

$f(x) = -\infty . e^{+\infty} = -\infty . (+\infty) = -\infty$. No hay AH en $-\infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua en $-\infty$, AO: $y = mx + n$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{-x\ e^x}{-x} = e^x = +\infty$. No hay asíntota oblicua en $-\infty$.