3.4 Υπερβολή

ΘΕΜΑ Β

1. (**16128**) Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε′ και Ε. (Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(\text{NE}') - (\text{NE})|$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

2. (**17942**) Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε′ και Ε. (Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(\text{NE}') - (\text{NE})|$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

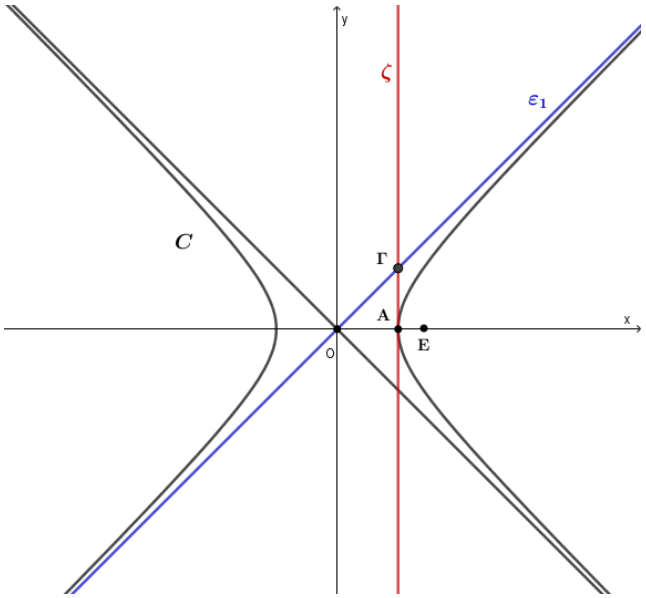
3. (**20721**) Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 9)

4. (**20869**) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή C: $x^2 - y^2 = 1$, η εστία της Ε, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $\text{A}(1, 0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες Ε΄, Ε και τις ασύμπτωτες ε_1, ε_2 της υπερβολής. (Μονάδες 10)

β) (i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ. (Μονάδες 07)

(ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1, 1)$. (Μονάδες 08)

5. (**21218**) Δίνονται οι υπερβολές $\left(C_1\right): x^2 - y^2 = 1, \left(C_2\right): y^2 - x^2 = 1.$

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1είναι οι $\mathrm{E}_1\left(\sqrt{2}, 0\right), E'_1\left(-\sqrt{2}, 0\right).$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\mathrm{E}_2, \mathrm{E}'_2$ οι εστίες της C_2τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

6. (**21649**) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C. (Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C. (Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

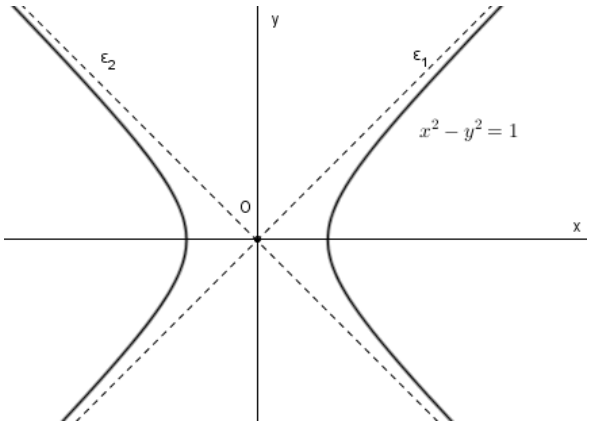
7. (**21651**) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

8. (**22051**) Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα. (Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 12)

9. (**22169**) Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την y = $\frac{3}{4}$ x. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α) (i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

(ii) Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

10. (**22196**) Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

11. (**22269**) Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

(i) Τις συντεταγμένες των εστιών της.

(ii) Την εκκεντρότητά της.

(iii) Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)

12. (**22559**) Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

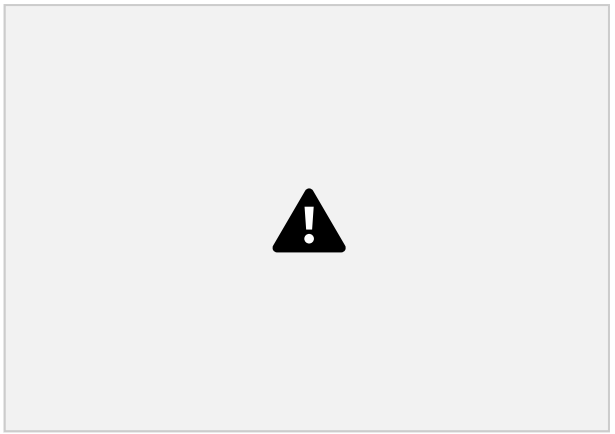
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω Μ ένα σημείο της υπερβολής.

(i) Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (Μονάδες 8)

(ii) Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την εστία Ε'. (Μονάδες 5)



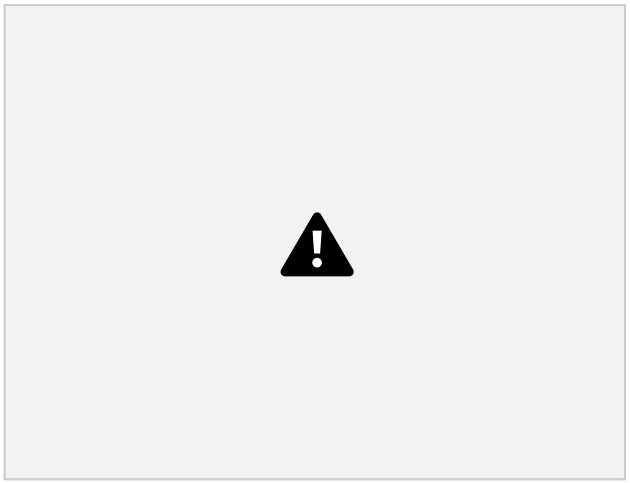
13. (**22561**) Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

(i) Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι δ_1: $y = x$ και δ_2: $y = -x$. (Μονάδες 8)

(ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι ε: $5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2. (Μονάδες 9)



14. (**22566**) Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0) (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)

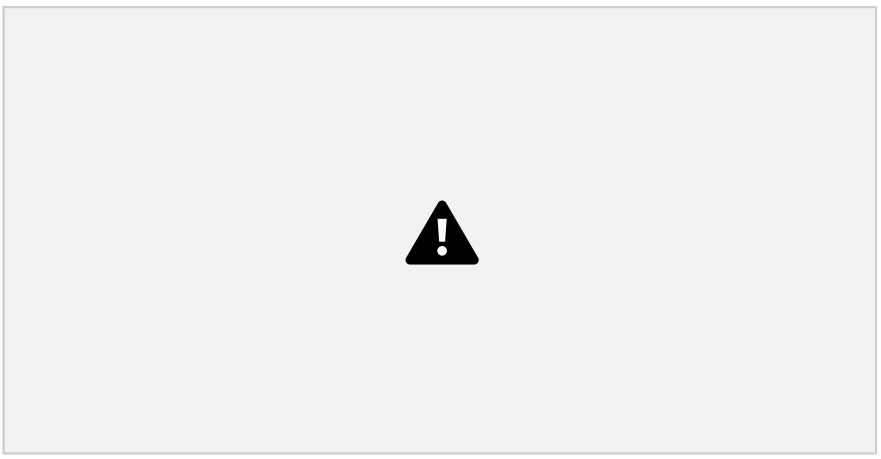
15. (**22567**) Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

(ii) οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C. (Μονάδες 5)



Teledu

ΘΕΜΑ Γ

16. (**17944**) Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $ΕΕ' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

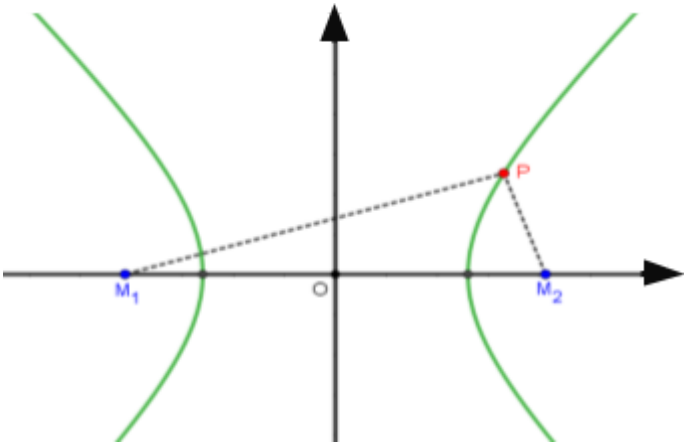
ΘΕΜΑ Δ

17. (**20653**) Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2.

α) Αν ονομάσουμε Ρ την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(\mathrm{PM}_1) - (\mathrm{PM}_2) = 1360\ m$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η θέση Ρ του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2. (Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$.
(Μονάδες 9)



18. (**21656**) Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(4,0), \mathrm{A}'(-4,0)$.

α) Να βρείτε: (i) τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C. (Μονάδες 3)

(ii) την εξίσωση της υπερβολής C.

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C, τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C. (Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$ σημείο της C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E}'$. (Μονάδες 5)

19. (**21657**) Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε: (i) τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C. (Μονάδες 6)

(ii) την εκκεντρότητα της C. (Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

(i) να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C. (Μονάδες 8)

(ii) είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C; Αιτιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

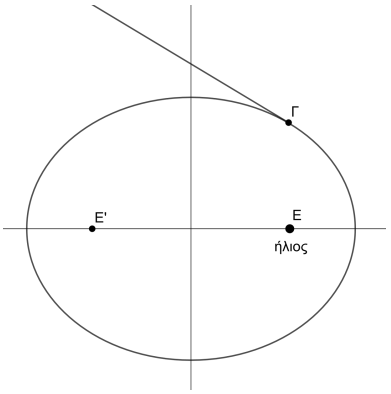
20. (**22174**) Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(i) Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο Γ $\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5). (Μονάδες 09)

(ii) Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με x > 0. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών; (Μονάδες 07)



21. (**32206**) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5,\frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. (Μονάδες 6)

Δίνεται ότι $\sqrt{1681}=41$.

22. (**21656**) Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0), A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε: (i) τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C. (Μονάδες 3)

(ii) την εξίσωση της υπερβολής C.

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C, τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C. (Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$ σημείο της C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E}'$. (Μονάδες 5)