

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{25} - \sqrt{9}$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, với $x > 0$; $x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức P . Tính giá trị của P khi $x = 4$.

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = 7 \end{cases}$

b) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $160m$ và diện tích là $1500m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

b) Tìm tham số m để phương trình: $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm M sao cho M nằm giữa O và B . Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt tia AC tại N , cắt BC tại E .

a) Chứng minh tứ giác $ACEM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng MN tại F . Chứng minh $\triangle CEF$ cân.

c) Gọi H là giao điểm của NB với nửa đường tròn (O) . Chứng minh HF là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 - 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 - 2ca + 3a^2}$$

-----Hết-----

Đáp án tham khảo:

Câu 1 (3 điểm)

Cách giải:

a) Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{25} - \sqrt{9} \quad B = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{2}$$

$$C = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$A = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{2}$$

$$= |\sqrt{2} + 1| - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$$

$$C = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2 + 4 - 7)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

Rút gọn biểu thức P . Tính giá trị của P khi $x = 4$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào $P = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ ta được: $P = \frac{4+2}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = 3$

Vậy $P = 3$ khi $x = 4$.

Câu 2 (1,5 điểm)

Cách giải:

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -5)$

b) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số, ta có:

$$-x^2 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Với $x=1 \Rightarrow y=-1^2=-1$

Với $x=-2 \Rightarrow y=-(-2)^2=-4$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $(1; -1), (-2; -4)$

Câu 3 (1,5 điểm)

Cách giải:

a) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 160m và diện tích là $1500m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là $x; y$ (m) ($80 > x > y > 0$)

Vì chu vi hình chữ nhật là 160m nên ta có: $2(x+y) = 160 \Leftrightarrow x+y = 80$ (1)

Vì diện tích hình chữ nhật là $1500m^2$ nên ta có: $xy = 1500$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=80 \\ xy=1500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=80-x \\ x(80-x)=1500 \end{cases}$$

Giải phương trình $x(80-x)=1500$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 80x = 1500$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 80x + 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 30x - 50x + 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-30) - 50(x-30) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-30)(x-50) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ x=50 \end{cases}$$

Với $x=30 \Rightarrow y=80-30=50$ (loại vì $x > y$)

Câu 3 (1,5 điểm)

Cách giải:

a) Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 160m và diện tích là $1500m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là $x; y$ (m) ($80 > x > y > 0$)

Vì chu vi hình chữ nhật là 160m nên ta có: $2(x+y) = 160 \Leftrightarrow x+y = 80$ (1)

Vì diện tích hình chữ nhật là $1500m^2$ nên ta có: $xy = 1500$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=80 \\ xy=1500 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=80-x \\ x(80-x)=1500 \end{cases}$$

Giải phương trình $x(80-x)=1500$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 80x = 1500$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 80x + 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 30x - 50x + 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-30) - 50(x-30) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-30)(x-50) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ x=50 \end{cases}$$

Với $x=30 \Rightarrow y=80-30=50$ (loại vì $x > y$)

Với $x = 50 \Rightarrow y = 80 - 50 = 30$ (thỏa mãn)

Vậy chiều dài mảnh vườn là 50m và chiều rộng mảnh vườn là 30m.

b) Tìm tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$$

Xét phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$

Ta có:

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.(m-3)$$

$$= 25 - 4m + 12 = 37 - 4m$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 (ld) \\ 37 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 37 > 4m \Leftrightarrow m < \frac{37}{4}$

Theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$$

Vì $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - x_1$

Ta có: $x^2 - 5x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m - 3 = 5x - x^2$

Mà x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ nên $m - 3 = 5x_1 - x_1^2$

Ta có:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(m - 3) + 3(5 - x_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2(5x_1 - x_1^2) + 3(5 - x_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 10x_1 + 2x_1^2 + 15 - 3x_1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^2 - 13x_1 + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^2 - 6x_1 - 7x_1 + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_1(x_1 - 2) - 7(x_1 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)(3x_1 - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Với $x_1 = 2 \Rightarrow m - 3 = 5 \cdot 2 - 2^2 \Leftrightarrow m - 3 = 6 \Leftrightarrow m = 9$ (thỏa mãn)

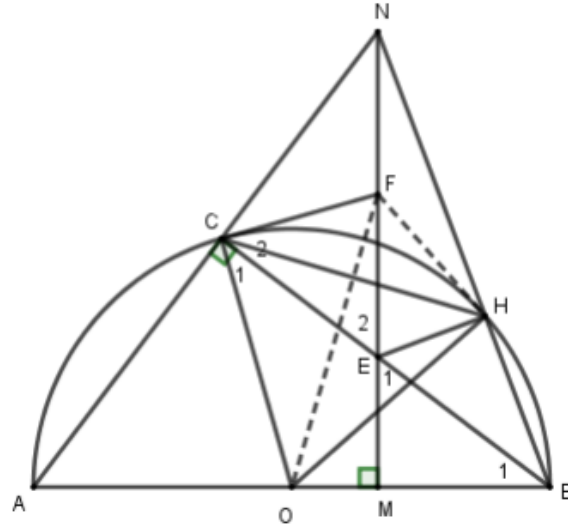
Với $x_1 = \frac{7}{3} \Rightarrow m - 3 = 5 \cdot \frac{7}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Leftrightarrow m - 3 = \frac{56}{9} \Leftrightarrow m = \frac{83}{9}$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 9; m = \frac{83}{9}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cách giải:

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm M sao cho M nằm giữa O và B . Đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt tia AC tại N , cắt BC tại E .



a) Chứng minh tứ giác ACEM nội tiếp trong một đường tròn.

Ta có: $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle AME = 90^\circ$ (do $EM \perp AB$)

Tứ giác ACEM có $\angle ACE + \angle AME = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°) (đpcm)

b) Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng MN tại F. Chứng minh $\triangle CEF$ cân.

CF là tiếp tuyến của (O) nên $OC \perp CF \Rightarrow \angle OCF = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle C_1 + \angle C_2 = 90^\circ$ (1)

Tam giác EMB vuông tại M nên $\angle B_1 + \angle E_1 = 90^\circ$

Mà $\angle E_1 = \angle E_2$ (đối đỉnh)

Nên $\angle B_1 + \angle E_2 = 90^\circ$ (2)

Tam giác OBC cân tại O nên $\angle B_1 = \angle C_1$ (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow \angle C_2 = \angle E_2$

$\Rightarrow \triangle CEF$ cân tại F (đpcm)

c) Gọi H là giao điểm của NB với nửa đường tròn (O). Chứng minh HF là tiếp tuyến của nửa đường tròn.

Tứ giác ABHC nội tiếp nên $\angle NHC = \angle CAB$ (tính chất)

Tứ giác ACEM nội tiếp nên $\angle E_2 = \angle CAM = \angle CAB$ (tính chất)

Nên $\angle NHC = \angle E_2 = \angle NEC$.

Tứ giác CNHE có $\angle NHC = \angle NEC$ (cmt) nên là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \angle NHE + \angle NCE = 180^\circ$ (tính chất)

$\Rightarrow \angle NHE = 180^\circ - \angle NCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle NHE$ vuông tại H .

Theo câu b, $\triangle CEF$ cân tại F nên $FE = FC$ (4)

Ta có:

$$\angle CNF + \angle E_2 = 90^\circ$$

$$\angle NCF + \angle C_2 = 90^\circ$$

Mà $\angle E_2 = \angle C_2$ (cmt) $\Rightarrow \angle CNF = \angle NCF \Rightarrow \triangle NCF$ cân tại F

$$\Rightarrow FC = FN \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $FC = FN = FE$ hay F là trung điểm EN .

Tam giác HNE vuông tại H có HF là trung tuyến nên $HF = \frac{1}{2} EN = \underline{CF}$.

Xét $\triangle OCF$ và $\triangle OHF$ có:

$$OC = OH (= R)$$

OF chung

$$FC = FH \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle OCF = \triangle OHF \text{ (c - c - c)}$$

$$\Rightarrow \angle OHF = \angle OCF \text{ (góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \angle OCF = 90^\circ \text{ nên } \angle OHF = 90^\circ \Rightarrow OH \perp HF$$

Vậy FH là tiếp tuyến của (O) (đpcm).

Câu 5 (0,5 điểm)

Cách giải:

Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 - 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 - 2ca + 3a^2}.$$

Ta có:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 2a^2 + 2b^2$$

$$= 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2} = a+b$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \geq a+b$$

Tương tự

$$\sqrt{3b^2 - 2bc + 3c^2} \geq b+c$$

$$\sqrt{3c^2 - 2ca + 3a^2} \geq c+a$$

Do đó

$$P \geq a+b+b+c+c+a$$

$$\Rightarrow P \geq 2(a+b+c)$$

Lại có

$$a+1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$b+1 \geq 2\sqrt{b}$$

$$c+1 \geq 2\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 2.3 - 3 = 3$$

$$\Rightarrow P \geq 2.3 = 6$$

$$\Rightarrow P_{\min} = 6$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$.