
1.-
a) En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0,90 m, 1,50 m y 2,40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros.
Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros en total. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado este cliente.

Resolución

Sean x, y, z el nº de listones de 0,90 m, 1,50 m y 2,40 m, respectivamente.
Usando el enunciado llegamos al sistema
$\{x + y + z = 19\ 0,9x + 1,5y + 2,4z = 30\ 4x + 6y + 10z = 126 \quad .10:3:2 \quad \{x + y + z = 19\ 3x +$

b) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible
$\{3x - y - z = 0\ 2x - 2y + z = 18\ x - 3z = 0$

Resolución

Matriz de coeficientes: $A = (3 \ -1 \ -1\ 2 \ -2\ 1\ 1\ 0 \ -3\ )$; matriz ampliada:
$A^{*} = (3 \ -1 \ -1\ 0\ 2 \ -2\ 1\ 18\ 1\ 0 \ -3\ 0\ )$.

Como det A = 18 – 2 – 6 = 10 ≠ 0, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

La matriz del sistema es
$(3 \ -1 \ -1\ 0\ 2 \ -2\ 1\ 18\ 1\ 0 \ -3\ 0\ ) f1 - 3f3 \ f2 - 2f3 \ \ (0 \ -1\ 8\ 0\ 0 \ -2\ 7\ 18\ 1\ 0 \ -3\ 0\ ) \ f2 - 2f1$

que corresponde al sistema $\{- y + 8z = 0\ z = - 2\ x - 3z = 0 \Rightarrow$
$\{- y + 8(-2) = 0 \Rightarrow y = - 16\ x - 3(-2) = 0 \Rightarrow x = - 6\ .$

La única solución del sistema es x = –6, y = –16, z = –2

2.- (prueba extraordinaria) Sean las matrices $A = (1 \ -1\ 0\ 2\ ) \ y \ \ B = (3\ 1 \ -1\ 1\ )$
a) Calcule A^2 y $2B + I_2$.

Resolución $A^{2} = (1 \ -1\ 0\ 2\ )(1 \ -1\ 0\ 2\ ) = (1 \ -3\ 0\ 4\ )$
$2B + I = 2(3\ 1 \ -1\ 1\ ) + (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (7\ 2 \ -2\ 3\ )$

b) Resuelva la ecuación matricial $AX – I_2 = 2B^2$.

Resolución

De $AX – I = 2B^2$, resulta $AX = 2B^2 + I$.
Como det A = 2 ≠ 0, existe $A^{-1} = \frac{1}{detdet\ A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{2}adj(1\ 0 \ -1\ 2\ ) = \frac{1}{2}(2\ 1\ 0\ 1\ )$

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, $A^{-1}AX = A^{-1}(2B^2 + I)$, $X = A^{-1}(2B^2 + I)$

$X = \frac{1}{2}(2\ 1\ 0\ 1\ )[2(3\ 1 \ -1\ 1\ )(3\ 1 \ -1\ 1\ ) + (1\ 0\ 0\ 1\ )] = \frac{1}{2}(2\ 1\ 0\ 1\ )[2(8\ 4 \ -4\ 0\ ) + (1\ 0\ 0\ 1\ )]$

$X = \frac{1}{2}(2\ 1\ 0\ 1\ )(17\ 8 \ -8\ 1\ ) = \frac{1}{2}(26\ 17 \ -8\ 1\ ) = \left(13\ \frac{17}{2} \ -4\ \frac{1}{2}\right)$

3.- (prueba ordinaria) Sea la igualdad AX + B = A, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.
a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

Resolución

De AX + B = A, resulta AX = A – B. Como existe A^{-1}, multiplicando por A^{-1}, por la izquierda,

$A^{-1}AX = A^{-1}(A – B)$, $X = A^{-1}(A – B) = I – A^{-1}B$

b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A = (2\ 5\ 1\ 3\ )\ y\ \ B = (0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 2\ )$

Resolución

det A = 1 ≠ 0. Luego, existe $A^{-1} = \frac{1}{\det\det A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{1}adj(2\ 1\ 5\ 3\ ) = (3\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ 2\ )$

$X = (3\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ 2\ )[(2\ 5\ 1\ 3\ ) - (0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 2\ )] = (3\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ 2\ )(2\ 8\ 2\ 1\ ) = (-\ 4\ 19\ 2\ \ -\ 6\ )$

4.-

a) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$(3\ 1\ -\ 2x\ 0\ 2\ x\ +\ 1\ 2\ 0\ 1\ z\ )(y\ 2\ 1\ ) = (-\ 1\ 2\ 0\ )$

Resolución

Operando e igualando componentes,

$\{3y\ +\ 2\ -\ 4x\ =-\ 1\ 2y\ +\ 2x\ +\ 2\ +\ 2\ =\ 2\ 2\ +\ z\ =\ 0\ \Rightarrow\{4x\ -\ 3y\ =\ 3\ x\ +\ y\ =-\ 1\ z\ =-\ 2\ .\ 3\rightarrow\{4x\ -\ 3$

Sumando las dos primeras ecuaciones, 7x = 0, x = 0 ⇒ 0 + y = –1 , y = –1.

La solución del sistema es x = 0, y = –1, z = –2

b) Dada la matriz $A = (2\ 3\ 4\ 5\ )$, calcule la matriz $M = A^tA^{-1}$.

Resolución

Como det A = –2 ≠ 0, existe $A^{-1} = \frac{1}{\det\det A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{-2}adj(2\ 4\ 3\ 5\ ) = \frac{-1}{2}(5\ \ -\ 3\ \ -\ 4\ 2\ )$

$M = A^{t}A^{-1} = (2\ 4\ 3\ 5\ )\frac{-1}{2}(5\ \ -\ 3\ \ -\ 4\ 2\ ) = \frac{-1}{2}(-\ 6\ 2\ \ -\ 5\ 1\ ) = \left(3\ \ -\ 1\ \frac{5}{2}\ \frac{-1}{2}\ \right)$

5.- Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35.6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

a) Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

Resolución

Sean x, y, z el nº de latas de los fabricantes A, B y C, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$\{x\ +\ y\ +\ z\ =\ 20\ 0,25x\ +\ 0,5y\ +\ 1z\ =\ 10\ 1x\ +\ 1,8y\ +\ 3,3z\ =\ 35,6\ \ \ \ .4:10\ \ \ \{x\ +\ y\ +\ z\ =\ 20\ x\ +\ 2$

b) Resuelva el problema.

Resolución

La matriz del sistema es

$(1\ 1\ 1\ 20\ 1\ 2\ 4\ 40\ 10\ 18\ 33\ 356\ )\ \ f2\ -\ f1\ f3\ -\ 10f1\ \ (1\ 1\ 1\ 20\ 0\ 1\ 3\ 20\ 0\ 8\ 23\ 156\ )\ \ \ \ 8f2\ -\ f3\ \ (1\ 1\ 1\ 20$

que corresponde al sistema $\{x\ +\ y\ +\ z\ =\ 20\ y\ +\ 3z\ =\ 20\ z\ =\ 4$; y = 20 – 3z = 20 – 3.4 = 8 ; x = 20 – y – z = 20 – 8 – 4 = 8.

Por tanto, x = y = 8, z = 4. Hemos comprado 8 latas al fabricante A, 8 al B y 4 al C

6.- Sean las matrices
$A = (-\ 1\ 4\ \ -1\ 0\ \ -1\ 0\ 3\ 1\ 2\ ),\ B = (-\ 2\ 1\ 3\ 0\ 2\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ )\ \ y\ \ C = (5\ \ -2\ \ -6\ 0\ \ -3\ 2\ \ -2\ 0\ \ -1\ )$
Determine X en la ecuación matricial XA – 2B = C.

Resolución

De XA – 2B = C, resulta XA = C + 2B. Como det A = 2 – 3 = –1 ≠ 0, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det det\ A}\left(adjA^{t}\right) = \frac{1}{-1}adj(-\ 1\ 0\ 3\ 4\ \ -1\ 1\ \ -1\ 0\ 2\ ) = -\ (-\ 2\ \ -9\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 3\ 13\ 1\ ) = (2\ 9\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ \ -3\ \ -13\ \ -1\ )$$

Multiplicando por A^{-1}, por la derecha, $XAA^{-1} = (C + 2B)A^{-1}$, $X = (C + 2B)A^{-1}$

$$C\ +\ 2B\ = (5\ \ -2\ \ -6\ 0\ \ -3\ 2\ \ -2\ 0\ \ -1\ ) +\ 2(-\ 2\ 1\ 3\ 0\ 2\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = I$$

Por tanto, $X = (C + 2B)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1} = (2\ 9\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ \ -3\ \ -13\ \ -1\ )$