

## Сложение и вычитание векторов.

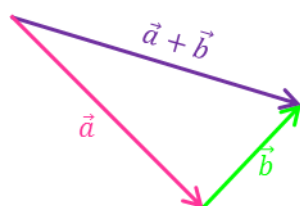
### Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.

Представим себе такую ситуацию. Направляясь из школы домой, вам захотелось пить и вы решили зайти сначала в магазин, а затем уже домой. Цель достигнута: вы из школы добрались домой. Сейчас мы описали принцип первого правила сложения векторов.

#### Правило треугольника.

Чтобы найти вектор суммы двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , нужно:

- 1) совместить параллельным переносом начало вектора  $\vec{b}$  с концом вектора  $\vec{a}$ ;
- 2) провести вектор из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$ ;
- 3) получившийся вектор и есть вектор суммы:  $\vec{a} + \vec{b}$ .



Если к вектору  $\vec{a}$  прибавить нулевой вектор  $\vec{0}$  по правилу треугольника, то получим вектор  $\vec{a}$ , т.е. справедливо равенство:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

**Утверждение.** Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  – произвольные точки, то  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

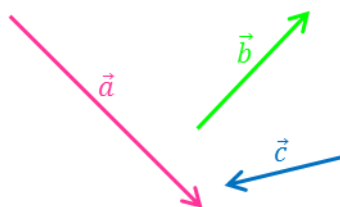
Например,  $\vec{EF} + \vec{FK} = \vec{EK}$ ,  $\vec{PR} + \vec{RS} + \vec{ST} + \vec{TQ} = \vec{PQ}$ .

Сложение векторов подчиняется алгебраическим законам.

**ТЕОРЕМА.** Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  справедливы равенства:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (переместительный закон)}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ (сочетательный закон)}.$$



Дано:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$

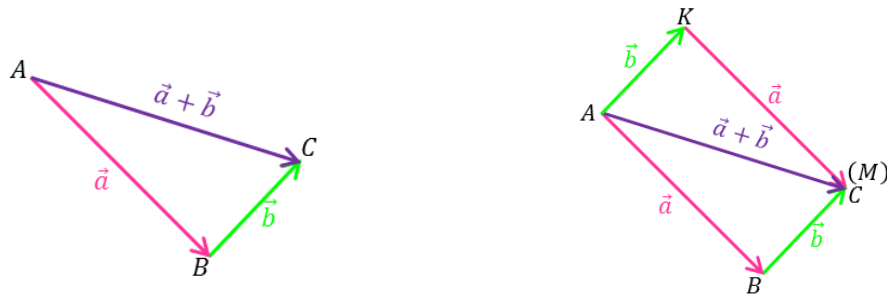
Доказать: 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

#### Доказательство.

Доказательство теоремы в случае, когда векторы коллинеарны достаточно простое. Его вы можете провести самостоятельно. Мы рассмотрим случай, когда данные векторы неколлинеарны.

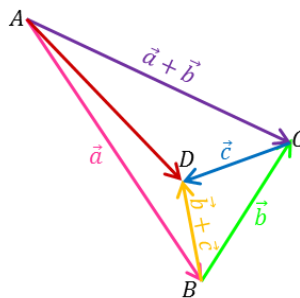
1). Отметим произвольную точку  $A$  и отложим от этой точки вектор  $\vec{AB} = \vec{a}$ . Воспользуемся правилом треугольника и прибавим к нему вектор  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Вектором суммы этих двух векторов является вектор  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ . (Рисунок слева).



Теперь от точки  $A$  и отложим вектор  $\vec{AK} = \vec{b}$ . По правилу треугольника прибавим к нему вектор  $\vec{KM} = \vec{a}$ . Вектором суммы этих двух векторов является вектор  $\vec{AM} = \vec{b} + \vec{a}$ . (Рисунок справа).

$\vec{AK} = \vec{BC} = \vec{b}$ , значит, они сонаправлены и длины у них равны;  $\vec{KM} = \vec{AB} = \vec{a}$ , значит, они сонаправлены и длины у них равны. Следовательно,  $ABKM$  – параллелограмм и точка  $M$  совпадает с точкой  $C$ . Значит,  $\vec{AC} = \vec{AM}$ , т.е.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

2). От точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \vec{a}$ , от точки  $B$  отложим вектор  $\vec{BC} = \vec{b}$ , а от точки  $C$



– вектор  $\vec{CD} = \vec{c}$ . Найдём суммы векторов по правилу треугольника.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}; \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD};$$

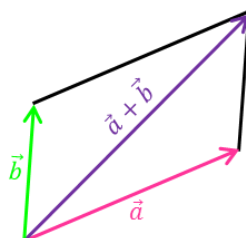
Теорема доказана.

При доказательстве первой формулы получился параллелограмм, причём, из точки  $A$  выходят два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а вектор их суммы является диагональю параллелограмма. На основе этого возникает второе правило геометрического сложения векторов.

### Правило параллелограмма.

Чтобы найти вектор суммы двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , нужно:

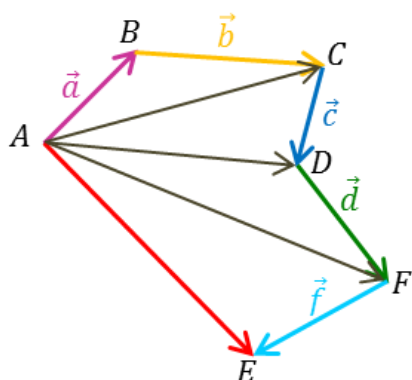
- 1) совместить параллельным переносом начала векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2) на этих векторах достроить параллелограмм;
- 3) вектором суммы  $\vec{a} + \vec{b}$  является вектор, который лежит на диагонали параллелограмма, имеющий своё начало в начале исходных векторов.



## Сумма нескольких векторов.

Сложение нескольких векторов происходит по принципу правила треугольника. Складываются два вектора, к вектору суммы прибавляется следующий вектор и т.д. Приведём пример.

Сложить векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$ .



Отметим точку  $A$  и отложим от неё вектор  $\vec{AB} = \vec{a}$ . Прибавим к нему вектор  $\vec{BC} = \vec{b}$  по правилу треугольника.  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ . Теперь к вектору  $\vec{AC}$  прибавим вектор  $\vec{CD} = \vec{c}$ .  $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ . К вектору  $\vec{AD}$  прибавляем вектор  $\vec{DF} = \vec{d}$ .  $\vec{AD} + \vec{DF} = \vec{AF}$ . Осталось к вектору  $\vec{AF}$  прибавить вектор  $\vec{FE} = \vec{f}$ .  $\vec{AF} + \vec{FE} = \vec{AE}$ .

Итак,  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DF} + \vec{FE} = \vec{AE}$ . Значит, суммой векторов  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f}$  является вектор, с началом в начале первого вектора и концом – в конце последнего. Такое сложение векторов называется правилом многоугольника.

## Правило многоугольника.

Чтобы найти вектор суммы нескольких векторов, нужно:

- 1) последовательно совместить параллельным переносом начало последующего вектора с концом предыдущего;
- 2) вектором суммы всех векторов является вектор, с началом в начале первого вектора и концом – в конце последнего.

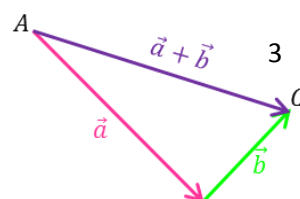
$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \vec{A_3A_4} + \vec{A_4A_5} + \dots + \vec{A_{n-2}A_{n-1}} + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n}$$

## Вычитание векторов.

**Определение.** Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , что при сложении его с вектором  $\vec{b}$  получается вектор  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$

Вычитание векторов можно производить, руководствуясь двумя понятиями: следствием из правила треугольника сложения векторов; определением разности двух чисел. Разберём каждое из них.



Сложим векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по правилу треугольника. По рисунку видно, что  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ . Отсюда,  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$  и  $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$ . Значит, разность двух векторов можно составить, совмещая их начала, либо совмещая их концы. Отсюда два правила:

### **I правило вычитания векторов.**

Чтобы найти вектор разности двух векторов, нужно:

- 1) совместить параллельным переносом начала этих векторов;
- 2) вектором разности является вектор с началом в конце второго вектора и концом в конце первого вектора.

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

### **II правило вычитания векторов.**

Чтобы найти вектор разности двух векторов, нужно:

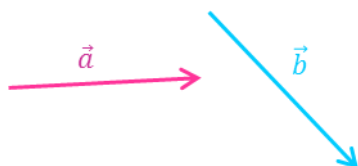
- 1) совместить параллельным переносом концы этих векторов;
- 2) вектором разности является вектор с началом в начале первого вектора и концом в начале второго вектора.

$$\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$$

Далее, из алгебры мы знаем, что для того, чтобы из числа  $a$  вычесть число  $b$ , нужно к числу  $a$  прибавить число, противоположное числу  $b$ , т.е.  $a - b = a + (-b)$ . Такое же правило справедливо и для векторов.

**ТЕОРЕМА.** Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  справедливо равенство:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

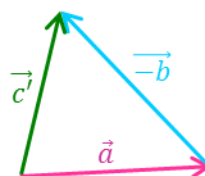
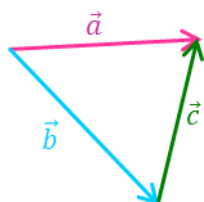


Дано:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$

Доказать:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Доказательство.

1. Найдём разность векторов  $\vec{a} - \vec{b}$  по I правилу. Вектором разности является вектор  $\vec{c}$  (рисунок слева). А теперь найдём сумму векторов  $\vec{a} + (-\vec{b})$  по правилу треугольника, где  $-\vec{b}$  – вектор, противоположный вектору  $\vec{b}$ . Вектором суммы является вектор  $\vec{c}'$  (рисунок справа). Не трудно заметить, что  $\vec{c}' = \vec{c}$ . Они сонаправлены и имеют одинаковые модули.



2. А теперь докажем то же самое аналитически. По определению разности векторов,

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Что и требовалось доказать.

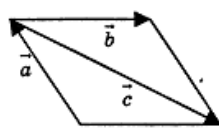
Из этой теоремы следует третье правило вычитания векторов.

### III правило вычитания векторов.

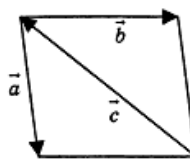
Чтобы найти вектор разности двух векторов, нужно к первому вектору прибавить вектор, противоположный второму.

Используя это правило вычитания векторов, способ сложения векторов выбирается произвольно.

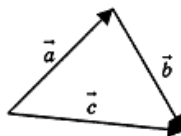
1. Вектор  $\vec{c}$  является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Определите, какой из четырёх рисунков верный.



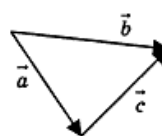
а)



б)



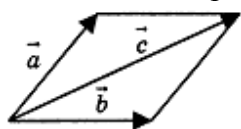
в)



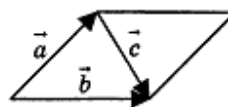
г)

2. Проведите векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DA}$ . Какая геометрическая фигура у вас получилась?

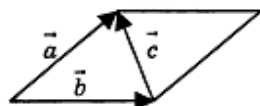
3. Вектор  $\vec{c}$  является разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Определите, какой из четырёх рисунков верный.



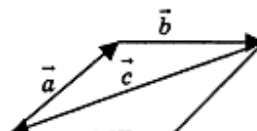
а)



б)

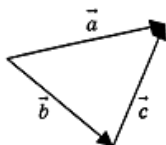


в)

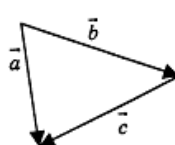


г)

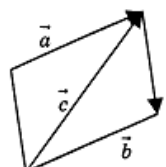
4. Вектор  $\vec{c}$  является суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Определите, какой из четырёх рисунков верный.



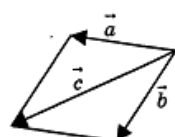
а)



б)

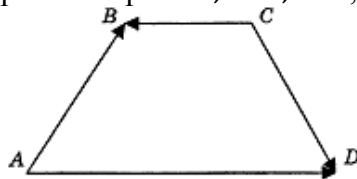


в)

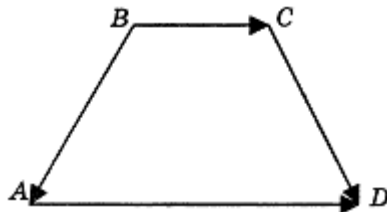


г)

5. Выразите вектор  $\vec{AB}$  через векторы  $\vec{AD}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{CB}$ , используя рисунок.



6. Выразите вектор  $\vec{BC}$  через векторы  $\vec{BA}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{CD}$ , используя рисунок.



7. Упростите выражения:

1)  $\vec{AC} + \vec{HK} + \vec{CH}$ ;

2)  $\vec{AM} - \vec{KM} - \vec{AP} + \vec{KP}$ ;

3)  $\vec{AB} + \vec{CM} + \vec{BC}$ ;

4)  $\vec{AM} - \vec{NM} - \vec{AP}$ ;

5)  $\vec{CM} + \vec{PA} + \vec{MP}$ ;

6)  $\vec{AM} - \vec{HK} - \vec{AK}$ .

8. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 5, а длина вектора  $\vec{c}$  равна 11. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора  $(\vec{a} + \vec{c})$ ?

9. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 3, а длина вектора  $\vec{m}$  равна 7. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора  $(\vec{a} + \vec{m})$ ?

10. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 2, а длина вектора  $(\vec{a} + \vec{m})$  равна 10. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора  $\vec{m}$ ?

11. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 1, а длина вектора  $\vec{m}$  равна 9. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора  $(\vec{a} + \vec{m})$ ?

12. Длина вектора  $\vec{a}$  равна 4, а длина вектора  $(\vec{a} + \vec{m})$  равна 11. Сколько различных целых значений может принимать длина вектора  $\vec{m}$ ?

13. В квадрате  $ABCD$  проведены диагонали  $AC$  и  $BD$ . Укажите номера верных утверждений.

1)  $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$ ;

2)  $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{DB}$ ;

3)  $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{AC}$ ;

4)  $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ ;

5)  $\vec{AB} = \vec{DC}$ ;

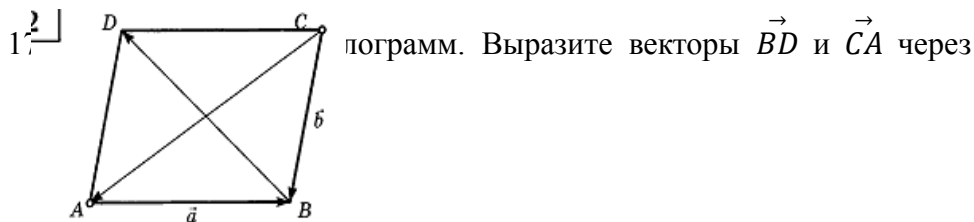
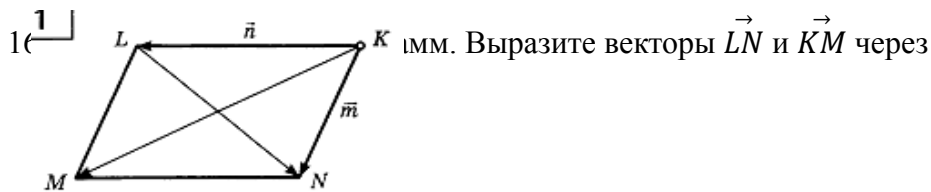
6)  $\vec{AB} = \vec{BC}$ ;

7)  $\vec{AC} = \vec{DB}$ ;

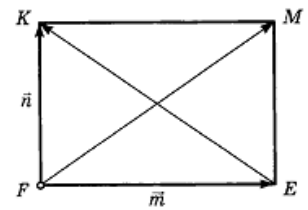
8)  $|\vec{AC}| = |\vec{DB}|$

14.  $KMNP$  – параллелограмм. Найдите сумму векторов  $\vec{MK} + \vec{MN}$ ;  $\vec{PN} + \vec{PK}$ ;  $\vec{PM} + \vec{MK}$ .
15.  $ABCD$  – прямоугольник. Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Укажите номера верных утверждений.

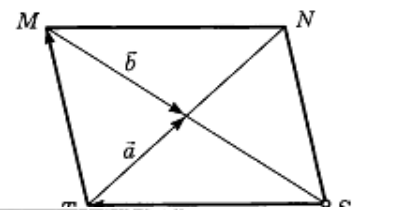
- 1)  $\vec{AD} - \vec{CD} = \vec{AC}$ ;      2)  $\vec{AD} - \vec{BD} = \vec{AB}$ ;      3)  $\vec{AD} - \vec{BD} = \vec{BA}$ ;  
 4)  $\vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OD} = \vec{AD}$ ;      5)  $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ ;      6)  $\vec{AO} - \vec{CO} + \vec{CB} = \vec{BA}$ ;  
 7)  $\vec{AO} = \vec{OC}$ ;      8)  $\vec{AC} = \vec{BD}$ ;      9)  $\vec{BA} = \vec{CD}$ ;      10)  $|\vec{BO}| = |\vec{DO}|$



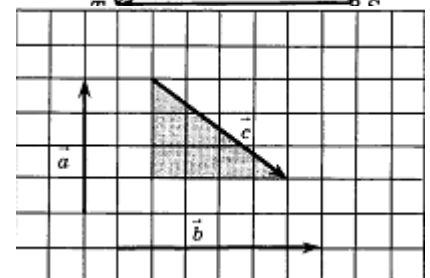
18.  $FKME$  – прямоугольник. Выразите векторы  $\vec{EK}$  и  $\vec{FM}$  через векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .



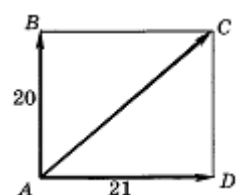
19.  $TMNS$  – параллелограмм. Выразите векторы  $\vec{TM}$  и  $\vec{ST}$  через векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



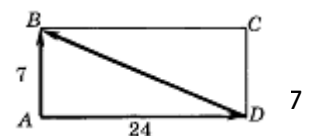
20. Найдите длины векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 x 1.



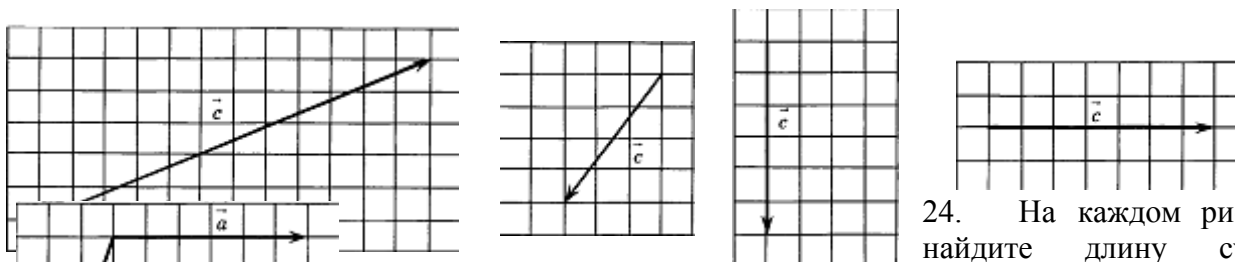
21. Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 20 и 21. Найдите длину суммы векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .



22. Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 7 и 24. Найдите длину разности векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .

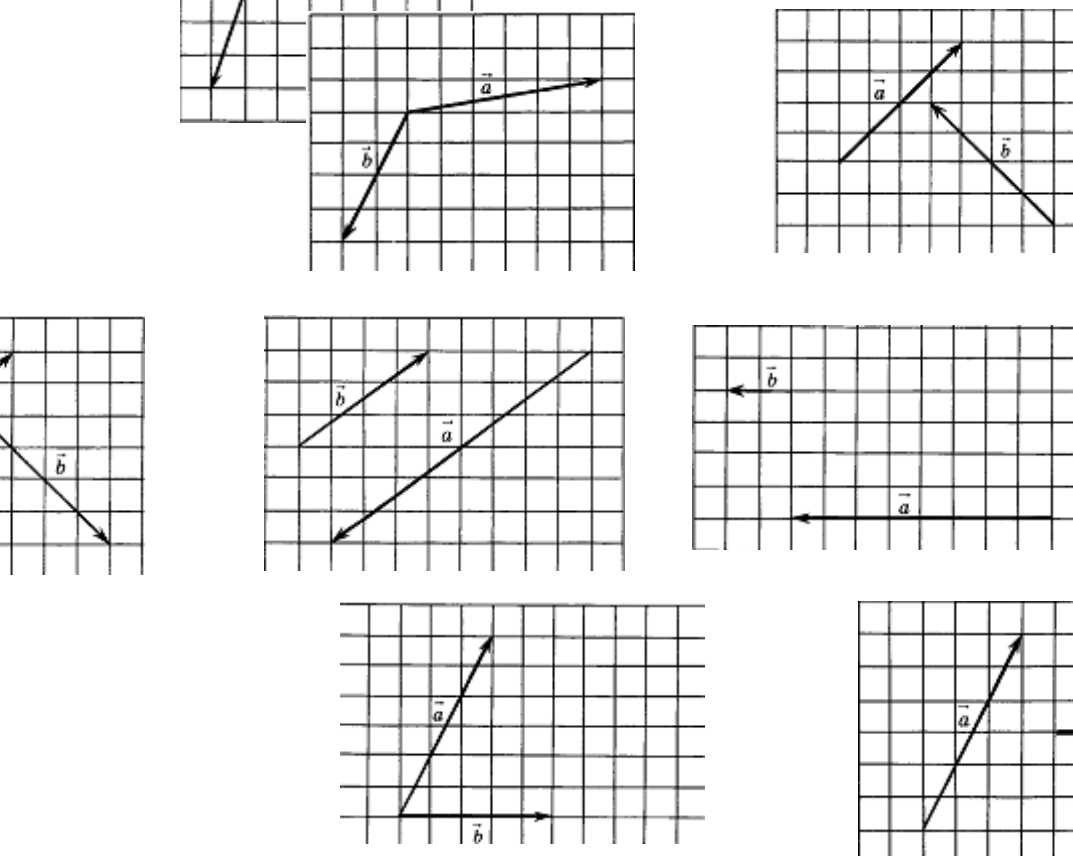


23. На каждом рисунке найдите длину вектора  $\vec{c}$  (размеры клетки 1 x 1).



24. На каждом рисунке найдите длину суммы

векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (размеры клетки 1 x 1).



25. На каждом рисунке найдите длину разности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , изображённых на клетчатой бумаге с размерами клетки 1 x 1.

