Quelques aspects de la mesure du temps

Partie I : Clepsydre

1. Travail des forces de pesanteur : $\boxed{\delta W_{pes} = g\,dm\,z(t)}$ **Éq. I**

2. En l'absence de frottements, les forces de pression exercées par les parois du récipient sont perpendiculaires à la vitesse du fluide et ne travaillent donc pas.

3. Travail élémentaire des forces de pression atmosphérique sur la surface libre :

$\boxed{\delta W_{pr} = P_0 dV}$ **Éq. II**

Avec une pression en sortie valant aussi P_0 et un fluide incompressible, le travail des forces de pression à la sortie est $-P_0 dV$ et le travail total des forces de pression est donc nul.

4. Variation d'énergie cinétique : $\boxed{dE_c = \frac{1}{2} dm \left(v_s^2 - v_n^2\right)}$ **Éq. III**

5. Le bilan énergétique donne alors $2gz(t) = v_s^2 - v_n^2$ et la conservation du débit $R^2 v_n = r^2 v_s$ avec $v_n = -\frac{dz}{dt}$

Et l'énoncé est manifestement faux : demander la forme d'un récipient supposé cylindrique – manifestement de révolution sur la figure de l'énoncé – est idiot !

- Soit le récipient est cylindrique de révolution, et l'on a l'équation différentielle :

$$2gz(t) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right) \approx \frac{R^4}{r^4}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$ **Éq. 4**

Il faut supposer $R \gg r$ pour avoir un écoulement quasi-permanent, et négliger la variation d'énergie cinétique de l'eau dans la clepsydre.

Cette équation est à variables séparables :

$$\frac{dz}{\sqrt{2gz(t)}} = -\frac{r^2}{R^2} dt$$ **Éq. 5**

Elle s'intègre avec $z(0) = Z_0$ en

$$\sqrt{z(t)} = \sqrt{Z_0} - t\frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}$$ **Éq. 6**

Le débit est **non constant** et diminue avec t, ce qui n'est pas satisfaisant pour une mesure du temps.

- Soit le récipient est de révolution, et l'on cherche sa forme $z = z(R)$ pour avoir une vitesse à la surface $v_n = -\frac{dz}{dt}$ constante. On obtient alors :

$$z(R) = \frac{v_n^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right) \approx \frac{v_n^2}{2g}\frac{R^4}{r^4}$$ **Éq. 7**

Mais la vitesse v_s et le débit de sortie diminuent avec t.

Il est en effet impossible d'avoir v_s constant si $z(t)$ varie. Avec $R > r$, on a :

$v_s = \sqrt{2gz(t)}$ **variable.** **Éq. 8**

C'est la formule de Torricelli de mécanique des fluides (qui n'est pas au programme MP !).

6. Il n'est pas utile de tracer l'allure de la relation $z(R)$ de l'énoncé, qui ne rime à rien !

On peut néanmoins prendre des ordres de grandeur :

$r \simeq 0,5\ mm$; $R \simeq 10\ cm$; $Z_0 \simeq 20\ cm$; initialement $v_s \simeq 2\ m.s^{-1}$ et $v_n \simeq 0,05\ mm.s^{-1}$ et une durée pour vider le réservoir supérieure à $\frac{Z_0}{v_n} \simeq 4\,000\ s$

et en prenant $z(t)$ du réservoir cylindrique :

$$\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2Z_0}{g}} \approx 8\,000\ \text{s} \approx 1\ \text{h}\ 1/4$$

Éq. 9

Pour avoir un débit constant en sortie de B, il faut un niveau constant dans B. Ctésibios obtient ce résultat grâce au récipient A, dont le débit doit toujours être supérieur à celui de B. On assure ainsi que B est toujours plein à ras bord (l'eau excédentaire venant de A déborde). Le flotteur du récipient cylindrique C monte alors à vitesse constante.

On peut dire que :

- A joue un rôle de réservoir (comme le ressort d'une montre) ;
- B est l'organe de régulation (comme le balancier d'une montre) ;
- C est l'indicateur (comme le cadran et les aiguilles d'une montre).

Partie II : Mouvement horloger mécanique

7. Recherche de l'équation de mouvement de (**6**) par rapport à (**0**) supposé galiléen. La question suivante nous donne un ordre de grandeur ; l'erreur relative temporelle est de :

$$\frac{5}{24\times 3\,600} \simeq \frac{1}{5\times 3\,600} \simeq \frac{1}{5\times 3\,600} \simeq \frac{1}{20\,000} \simeq \frac{5\,10^{-5}}{1} \qquad \textbf{Éq. 10}$$

d'où une précision absolue par seconde meilleure que 5 chiffres significatifs ; soit – pour être tranquille – car on ne s'amuse pas à fabriquer une seule montre mais une série, et en tenant compte des phénomènes de dispersion, toutes les valeurs doivent être connues avec 6 chiffres significatifs !!!!

On applique le principe fondamental de la dynamique appliqué à (**6**) réduit à ses moments au point O, projetés sur $\vec{z}$.

$$\vec{M}\left(O,0\xrightarrow{5}6\right)\bullet\vec{z}+\vec{M}\left(O,0\xrightarrow{pes}6\right)\bullet\vec{z}+\vec{M}\left(O,0\xrightarrow{Pi}6\right)\bullet\vec{z}+\vec{M}\left(O,0\xrightarrow{air}6\right)\bullet\vec{z}$$
$$=\delta\left(O,6/0\right)\bullet\vec{z}$$

;

- $\vec{M}(O,0\,5\to 6)\bullet\vec{z}=-\frac{Ele^3}{12L}\theta=-\kappa\theta$, par hypothèse ;
- $\vec{M}(O,0\,pes\to 6)\bullet\vec{z}\simeq 0$, si O est le centre de gravité du volant (avec un écart entre l'axe de rotation et le centre de gravité « à 10^{-6} près » ; en unité SI, cela donne « à 1 micromètre près ») ! Comme le réglage des quatre distances r_1^i me semble manuel, on comprend l'art de l'horloger.
- $\vec{M}(O,0\,Pi\to 6)\bullet\vec{z}\simeq 0$, si le pivot antichoc est parfait.
- $\vec{M}(O,0\,air\to 6)\bullet\vec{z}\simeq 0$, négligé ici car non modélisé !

Remarque : ces deux derniers moments sont forcément présents car nous n'aurions pas besoin d'entretenir le mouvement oscillant du volant.

- $\vec{\delta}\left(O,\frac{6}{O}\right)\bullet\vec{z}=\underset{\backsim O\,CI\ \vec{z}\in 0}{\frac{d\vec{\sigma}\left(O,\frac{6}{O}\right)\bullet\vec{z}}{dt}=\frac{dI(O,6)\vec{\Omega}\left(\frac{6}{O}\right)\bullet\vec{z}}{dt}}$; **Éq. 11**
  - On suppose que le boîtier (**0**) soit galiléen ; comme la montre d'un mort n'est pas très utile ! c'est une hypothèse très forte pour le porteur de montre lambda. On néglige le terme : $\vec{\sigma}\left(O,\frac{6}{O}\right)\bullet\frac{d\vec{z}}{dt})_0$, dont on ne sait rien ; comme $\frac{d\vec{z}}{dt})_0$ peut être quelconque tous les termes de la matrice d'inertie peuvent intervenir et donc le problème de l'équilibrage du volant en liaison rotule élastique avec le boîtier se pose !
  - On suppose que l'axe de rotation du volant soit galiléen, pas de phénomène gyroscopique ici (la liaison volant-boîtier me semble être une rotule de centre O, dont le ressort (**5**) supprime ou plutôt limite – élastiquement – les deux rotations « parasites »).
  - Il est clair ici :

$$\left(?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ ?\ C_6\right)\ O\left(0\ 0\ \dot{\theta}\right)\bullet(0\ 0\ 1)=C_6\dot{\theta}$$

Quels que soient les autres coefficients de la matrice de l'opérateur d'inertie.

  - Il est clair ici que les 4 masselottes jouent le même rôle inertiel autour de $\left(O,\vec{z}\right)$.
  - $I(O,6)=I(O,couronne)+4I\left(G_m,masselotte\right)+4I\left(O,\left\{G_m,m_m\right\}\right)_{\backsim Huygens}$
    - $C(O,couronne)$
      - $C(O,couronne)=\int_0^{2\pi} r_0^2\rho r_0 d\theta=\left[\rho\frac{r_0^3\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=\rho\frac{r_0^3 2\pi}{4}$

- $m_0 = \int_0^{2\pi} \rho r_0 d\theta = 2\pi\rho r_0 \Rightarrow \rho = \frac{m_0}{2\pi r_0}$,

- d'où : $C(O, couronne) = \frac{m_0}{2\pi r_0}\frac{r_0^3 2\pi}{4} = \frac{m_0 r_0^2}{4}$ **Éq. 12**

▪ $4C\left(G_m, masselotte\right) + 4C\left(O, \{G_m, m\}\right)$

- rappel :

  - $C = \int\left(x^2 + y^2\right)dm\,;\, A = C\,;\, A + C = B + 2\int y^2 dm\,;\, B = \int r^2 dm$

  - $2C = \int r^2 dm + 2\int y^2 dm$

- évidence : $m_1 = \rho\pi r_1^2 h \Rightarrow \rho = \frac{m_1}{\pi r_m^2 h_m}$

- $2\int r^2 dm = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_m}\int_{-\frac{h_m}{2}}^{\frac{h_m}{2}} r^2 \rho dr\, r d\theta dy = 2\rho\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{r_m}\left(\int_{-\frac{h_m}{2}}^{\frac{h_m}{2}} dy\right) r^3 dr\right] d\theta = 2\rho h_m \frac{r_m^4}{4} 2\pi = \rho h_$

Éq. 13

- $4\int y^2 dm = 4\int_0^{2\pi}\int_0^{r_m}\int_{\frac{-h_m}{2}}^{\frac{h_m}{2}} y^2 \rho dr\, r d\theta dy = 4\rho\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{r_m}\left(\int_{\frac{-h_m}{2}}^{\frac{h_m}{2}} y^2 dy\right) r dr\right] d\theta = 4\rho 2\pi \frac{r_m^2}{2}\frac{h_m^3}{12} = \rho\pi$

Éq. 14

▪ $4C\left(O, \{G_m, m_m\}\right) = 4m_1 r_1^2$

- $C(O,6) = \frac{m_0 r_0^2}{4} + m_1 r_m^2 + \frac{m_1 h_m^2}{3} + 4m_1 r_1^2 = m_0\frac{3r_0^2}{12} + m_1\frac{12r_m^2 + 4h_m^2 + 48r_1^2}{12}$ **Éq. 15**
- **Bilan** : $C_6\left(m_0\left(r_0\right), r_0^2, m_1\left(r_m, h_m\right), r_m^2, h_m^2, r_1^2\right)$
- **Remarques** :

  ▪ évidemment, on n'a pas besoin de faire tous les calculs précédents pour trouver les paramètres du moment d'inertie du volant !

  ▪ les données numériques (en retrait par rapport à la Figure 5) montrent que :

    - les masselottes sont supposées ponctuelles (le rayon et la hauteur ne sont pas donnés) ;
    - la masse des 4 masselottes (malgré leur « ponctualité » !) est quasi la même que celle du volant, ce qui – vu la différence de volume très visible sur la Figure 5 – implique une masse volumique très différente.

Finalement le principe fondamental de la dynamique donne :

$$C_6\ddot{\theta} + \kappa\theta = 0$$

dont la solution classique est : $\theta = Aexp\left(-t\sqrt{\frac{\kappa}{C_6}}\right)$; la pulsation de cet oscillateur non amorti est : $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{C_6}} = \sqrt{\frac{Ele^3}{12L}\frac{12}{3m_0 r_0^2 + 12m_1 r_m^2 + 4m_1 h_m^2 + 48m_1 r_1^2}} \underset{\backsim r_m \ll 1\, h_m \ll 1}{\simeq} \sqrt{\frac{Ele^3}{3L}\frac{1}{m_0 r_0^2 + 16m_1 r_1^2}}$ **Éq. 16**

Pour augmenter la fréquence de pulsation, il faut donc :

- Augmenter la raideur du ressort ;
- Augmenter le module d'Young ;

- Augmenter la hauteur ;
- Augmenter l'épaisseur ;
- Diminuer la longueur.

- Diminuer l'inertie du volant :
  - Diminuer la masse des 5 solides en mouvement ;
  - Diminuer les dimensions des 5 solides en mouvement ;
  - Diminuer la distance des masselottes à l'axe de rotation.

8. Le volant provoque un échappement de l'ancre chaque fois qu'il passe par 0. Donc, deux fois par oscillation, à l'aller et au retour. Sa fréquence est de 4 Hz et sa période de $0,25\,s$. La roue d'ancre tourne donc de $\frac{1}{Z}$ tour tous les $0,125\,s$. La fréquence « d'échappement » est de 8 Hz : $\omega_{nominal} = \omega_n = 2\pi\times 8 \simeq 50\ rad \bullet s^{-1}$

Pour un déplacement r des masselottes :

- la variation du moment d'inertie est $\delta \mathbf{C}_6 = 4m_1\delta\left(r_1^2\right) = 8m_1 r_1 \delta r_1$
- la variation relative de fréquence est $\frac{\delta f}{f} = -\frac{1}{2}\frac{\delta \mathbf{C}_6}{\mathbf{C}_6} = -\frac{4m_1 r_1 \delta r_1}{\mathbf{C}_6}$ avec $C_6 \approx m_0 r_0^2 + 4m_1 r_1^2 \approx 5{,}7\,10^{-10}\ \mathrm{kg.m^2}$

Pour corriger un écart $t = 5\,s$ en $T_{24} = 24\,h = 86\,400\,s$, il faudra un déplacement (en valeur absolue) $\boxed{\delta r_1 = \frac{\mathbf{C}_6}{4m_1 r_1}\frac{\delta t}{T_{24}} \approx 7\,10^{-7}\ \mathrm{m} \approx 0{,}7\ \mu\mathrm{m}}$ précision irréalisable.

9. La dilatation du balancier en laiton augmente les longueurs r_i de $\delta r_i = r_i \zeta_{\text{laiton}} \Delta T$, et donc le moment d'inertie de $\delta C_6 = 2m_0 r_0 \delta r_0 + 8m_1 r_1 \delta r_1 = 2C_6 \zeta_{\text{laiton}} \Delta T$

De même, la dilatation du ressort en acier provoque une variation relative de raideur $\frac{\delta\kappa}{\kappa} = \frac{\delta l}{l} + 3\frac{\delta e}{e} - \frac{\delta L}{L} = 3\zeta_{\text{acier}}\Delta T$

D'où la variation relative de fréquence : $\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta\kappa}{2\kappa} - \frac{\delta C_6}{2C_6} = \left(\frac{3}{2}\zeta_{\text{acier}} - \zeta_{\text{laiton}}\right)\Delta T \approx -5\,10^{-6}$

et la montre retardera de $\delta t = T_{24}\frac{\delta f}{f} \approx \boxed{0{,}4\ \mathrm{s} \approx \delta t}$ par jour.

10. Le contact entre l'extrémité d'une dent et « l'incliné » de la palette peut être modélisé :

- Géométriquement, par une arête et une portion de plan : **rectiligne**.
- Techniquement, la longueur de l'arête est ridicule devant la longueur de l'axe de la roue (au moins vingt fois d'après la Figure 4 !) : **ponctuelle**.
- Physiquement : le contact – avec choc, puis frottement de glissement entre un bronze quelconque et un saphir non moins quelconque – répété moult fois implique un contact surfacique avec une déformation élastique probable de l'extrémité de la dent. Modèle probable : Hertz ! plus une étude tribologique du contact.
- C'est surement un modèle physique que le fabricant utilise pour concevoir ce couple d'organes cruciaux pour le fonctionnement d'un chronomètre.

Partie III : Horloge à quartz

11.

- A.N.

$\omega_s \simeq 2,059\ 10^5\ rad.s^{-1}$, soit une fréquence $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \simeq 32,78\ kHz$. **Éq. 17**

$\omega_p \simeq 2,061\ 10^5\ rad.s^{-1}$, soit une fréquence $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \simeq 32,81\ kHz$. **Éq. 18**

Avec des données à 3 chiffres significatifs, le quatrième chiffre des A.N. est en trop. Il montre juste que les valeurs indicées s ou p sont très proches :

$\omega_p \geq \omega_s \simeq 2,06\ 10^5\ rad.s^{-1}$ et $f_p \geq f_s \simeq 32,78\ kHz$. On peut calculer les écarts :

$$\omega_p - \omega_s \approx \frac{C_1}{2C_0}\omega_s = \frac{\omega_s}{1000} = 206\ \text{rad.s}^{-1}$$; **Éq. 19**

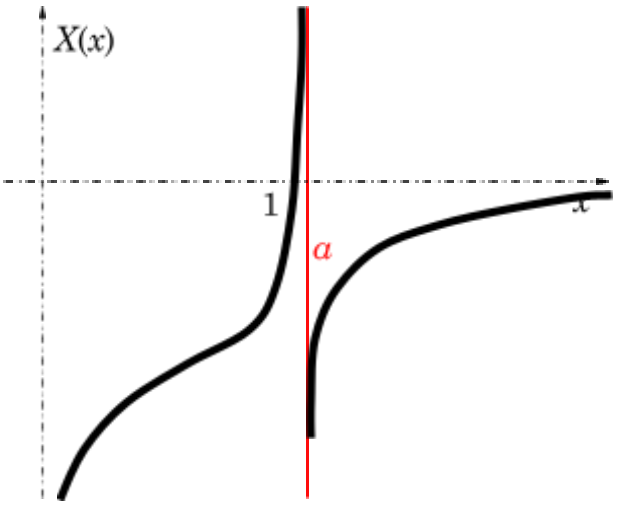
$$f_p - f_s \approx \frac{C_1}{2C_0} f_s = \frac{f_s}{1000} = 32,8\ \text{Hz}$$

Enfin $Q \simeq 51\ 000$

12.

- La réactance vaut :

$$X(x) = \frac{-1}{C_0\omega_s x}\frac{1-x^2}{a^2-x^2}$$ avec a 1,001 à peine supérieur à 1.



Le quartz se comporte comme un condensateur $X < 0$, sauf dans l'étroite bande de fréquences $1 < x < a$ où il se comporte comme une inductance $X > 0$.



13. Cela permet de décrire le schéma équivalent au quartz en prenant la résistance R_1 en compte.

14. La courbe en trait plein représente la réactance de Z (partie imaginaire de signe

variable).

La courbe en pointillé représente la partie réelle de Z, toujours positive.

Il y a pour la pulsation $_p$ un maximum de la résistance et changement de signe de la réactance.

N.B. : La formule donnant $Z(\ _s)$ est non homogène et comporte donc une erreur : il faut lire R_1 et non $R\ -\ 1$

15. C'est à la fréquence f_s que $|Z|$ est minimal, ce qui permet, pour une tension donnée, d'avoir l'intensité la plus grande possible.

Le choix d'une puissance de 2 pour la fréquence $f_s \simeq 32\,768 = 2^{15}\ Hz$ permet, par divisions successives par 2, d'obtenir la fréquence de base 1 Hertz.

16. Pour une variation (en plus ou en moins) de température de 10°C ; on a une *diminution* relative de fréquence $\left|\frac{f_0}{f_0}\right| \simeq 4\ 10^{-6}$. La montre retardera en un an de :

$$4\ 10^{-6} - 6{\times}3\,600{\times}24{\times}365 \simeq 126\ s\ \simeq\ 2\ min \qquad \textbf{Éq. 20}$$

Partie IV : Asservissement d'une horloge à quartz à un signal de référence

17. Le but est d'asservir la *fréquence*, et pour cela on utilise un comparateur de *phase*.

En effet, il reste dans un asservissement une différence non nulle entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie, et un asservissement de fréquence donnerait deux fréquences voisines, mais pas totalement identiques. On réalise donc un asservissement sur les phases qui sont, à un facteur 2π près, les intégrales des fréquences : on a ainsi une différence constante entre les phases d'entrée et de sortie mais les fréquences sont les mêmes.

18. Sensibilité $\boxed{\sigma = \dfrac{\partial u}{\partial\left(\phi_r - \phi_Q\right)} = -kV_rV_Q\sin\left(\phi_r - \phi_Q\right)}$

- Si $_r = _Q = _0$, $u(t) = 0$ soit $_r - _Q = \frac{\pi}{2}$: points A et B.
- Si $_Q$ augmente, ce qui revient à une augmentation de la pulsation $_Q$, on se déplace vers la gauche sur l'axe de la Figure 11.
- Si l'on est au point A : $u(t)$ devient < 0 ce qui tend à diminuer la pulsation $_Q$ de l'OCT : *stabilité*
- Si l'on est au point B : $u(t)$ devient > 0 ce qui tend à augmenter encore la pulsation $_Q$ de l'OCT : ce n'est pas stable.

19. L'équation différentielle $u + \tau\dfrac{du}{dt} = v_1$ du filtre passe-bas $\dfrac{u}{v_1} = F(p) = \dfrac{1}{1+\tau p}$ donne, en linéarisant le produit $v_1(t)$:

$$u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = kV_rV_Q\underbrace{\cos\left(\Phi_{err}(t)\right)}_{\text{terme de pulsation } \frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}t}} + kV_rV_Q\underbrace{\cos\left(\Phi_r + \Phi_Q\right)}_{\text{terme de pulsation} \approx 2\omega_r}$$

Éq. 21

Si l'on suppose $_r >> 1$ et en se limitant aux basses fréquences $< \frac{1}{\tau}$ (les seules qui se retrouvent après le filtre pour la commande de l'OCT), il reste bien :

$$\boxed{u + \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = kV_rV_Q\cos\left(\Phi_{err}(t)\right)}$$

Éq. 22

20. En remplaçant $K_0u(t) = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_Q}{\mathrm{d}t} - \omega_0 = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{err}}{\mathrm{d}t} - \omega_0 = \Delta(t) - \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{err}}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation précédente, il vient : $\tau\dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + \Delta(t) - \tau\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{err}}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{err}}{\mathrm{d}t} = K_0kV_rV_Q\cos\left(\Phi_{err}\right)$

soit encore : $\boxed{\tau\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_{err}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{err}}{\mathrm{d}t} + K\cos\left(\Phi_{err}\right) = \Delta(t) + \tau\dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}}$; CQFD **Éq. 23**

21. En situation de verrouillage, $_r = _Q$ et $_{err} == C^{ste}$ et il reste :

$$\boxed{\Delta(t) = K\cos\left(\Phi_{err}\right)}$$

Éq. 24

Le cosinus étant borné par $[-1,+1]$, on aura forcément $_r[\ _0 - K,\ _0 + K]$ (plage de verrouillage).

22. On a donc = constant, et au début $u(t) = kV_rV_Q\cos(\delta t)$ générant pour l'OCT la pulsation $\omega_Q = \omega_0 + K\cos(\delta t)$. Pour que le verrouillage puisse avoir lieu, on doit évidemment être dans la plage de verrouillage : il faut donc $|| < K$.

Mais il faut aussi que la pulsation traverse le filtre passe-bas de pulsation de coupure 1/. Dans l'hypothèse simple d'un filtre rectangulaire ($F = 1$ avant f_c et $F = 0$ au-delà), cela donne la condition $|| < 1/$.

23. On a :

$$U(p) = F(p)V_{err}(p) = K_D F\,\Phi_{err} = K_D F\left(\Phi_r - \Phi_Q\right) = K_D F(p)\Phi_r(p) - K_D F(p)K_0\frac{U(p)}{p} \qquad \textbf{Éq. 25}$$

D'où la fonction de transfert, avec $N(p) = K_D F(p)$ et $B(p) = \frac{K_0}{p}$

$$\boxed{\frac{U(p)}{\Phi_r(p)} = \frac{K_D F(p)}{1 + K_D K_0 \frac{F(p)}{p}}} \qquad \textbf{Éq. 26}$$

Et $\Omega_r(p) = p\Phi_r(p)$ d'où :

$$\boxed{\frac{U(p)}{\Omega_r(p)} = \frac{K_D F(p)}{p + K_D K_0 F(p)}}$$ CQFD **Éq. 27**

Il s'agit d'un système bouclé.

24. En boucle ouverte :

$$\Omega_Q(p) = p\Phi_Q = K_0 U = K_0 F V_{err} = K_0 F K_D \Phi_{err} = K_0 F(p) K_D \frac{\Omega_r(p)}{p}$$ d'où :

$$G_0(p) = \frac{\Omega_Q(p)}{\Omega_r(p)} = \frac{K_T F(p)}{p} = \boxed{\frac{K_T}{p(1+\tau p)} = G_0(p)} \qquad \textbf{Éq. 28}$$

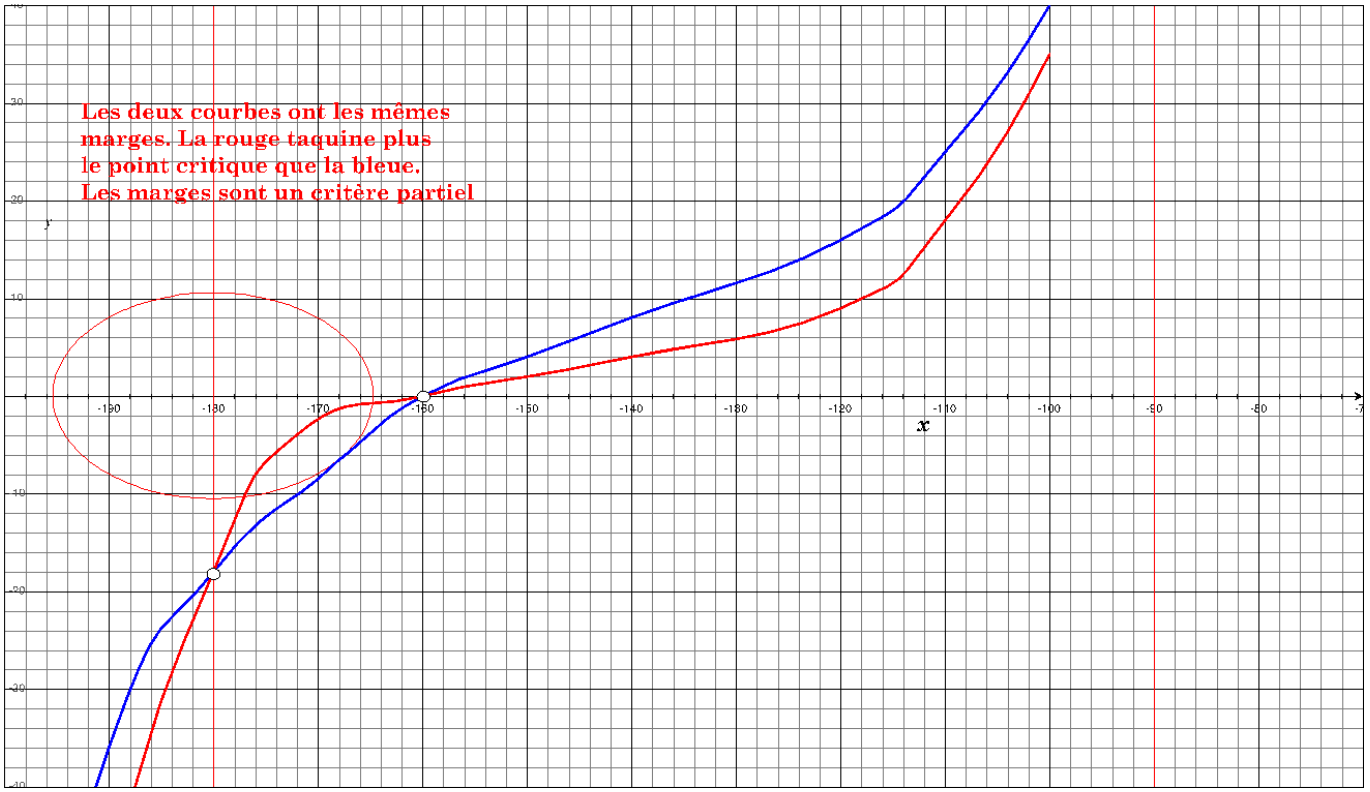
dont le tracé asymptotique du diagramme de Bode est représenté ci-dessus.



25. Remarque : l'étude du plan des pôles, qui permet un peu de comprendre cet outil assez complexe est hors programme. Malgré l'adjectif « pratique » de l'énoncé qui semble permettre de prendre des libertés avec la théorie et permettre au candidat d'enfiler comme des perles, les lieux communs sur le sujet, les réponses à ce type de question sont difficiles à rédiger (par le candidat) et difficile à corriger – i.e. noter ! – (par le correcteur !). Il est d'ailleurs assez facile de construire des fonctions de transfert pathologiques qui illustrent la faiblesse de la notion de marge vis à vis de ce qu'elles sont censées calibrer numériquement : la stabilité du système.

Les marges de la fonction de transfert de la « boucle ouverte » sont des indicateurs indirects de la stabilité de la fonction de transfert de la « boucle fermée ».

- grossièrement :
  - si l'une d'elles est négative le système en « boucle fermée » possède au moins un pôle à partie réelle positive. Si l'une d'elle est positive, on peut tomber sur un os. Ce qui est gênant pour un ingénieur issu de ce concours !
  - c'est un critère **binaire** : système stable ou instable suivant le signe de la marge.
  - la valeur de la partie réelle d'un pôle de H_F n'a pas de rôle dans la « qualité » de sa stabilité. Pas plus que la valeur d'une des marges !
  - plus la valeur de la partie réelle d'un pôle de H_F est grande est plus le système est rapide : soit pour converger soit pour diverger.
  - le lien mathématique entre la grandeur des marges de H_0 et la distance qui sépare – dans le plan complexe – les pôles de H_F de l'axe imaginaire est loin d'être simple et linéaire. La valeur numérique des marges a un lien avec la rapidité du système.
  - les marges ne sont que deux valeurs permettant d'avoir une idée du comportement de H_0 au voisinage du point critique – 1. Être ou ne pas être à l'intérieur du contour de Nyquist, là est la question de la stabilité !



- **Bilan** : les marges caractérisent, pour des systèmes bien connus, la stabilité du système. Çà marche très bien avec un environnement normal ; c'est comme le code de la route où le conducteur qui roule à droite prie à chaque instant le ciel pour que l'un des milliers de véhicules qu'il croise sur son trajet respecte lui aussi la règle.

26. L'argument de G_0 vaut $-3/4$ pour $= 1/$ où $||G_0||$ vaut $\tau K_T / \sqrt{2}$: la marge de phase vaut donc /4 pour $\boxed{\tau K_T = \sqrt{2}}$ **Éq. 29**

Il n'est donc pas très utile de calculer la pulsation $\omega^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\tau^2 K_T^2}}{2\tau^2}$ pour laquelle le gain en boucle ouverte est unitaire

27. Fonction de transfert en boucle fermée :

$$G(p) = \frac{\Omega_Q(p)}{\Omega_r(p)} = \frac{\Phi_Q(p)}{\Phi_r(p)} = \frac{K_0}{p}\frac{N(p)}{1+B(p)N(p)} = \frac{K_T F(p)}{p+K_T F(p)} = \frac{K_T}{K_T + p(1+\tau p)} = \frac{\frac{K_T}{\tau}}{p^2 + \frac{p}{\tau} + \frac{K_T}{\tau}}$$

et donc $\boxed{\omega_c = \sqrt{\frac{K_T}{\tau}}}$ et $\boxed{\xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau K_T}}}$ **Éq. 30**

On a vu à la question **26** que la marge de phase vaut 45° pour $\tau K_T = \sqrt{2}$. ξ vaut alors :

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} = 2^{-5/4} \approx 0{,}42}$$

Éq. 31

28. Il faut lire figure 13 à cette question. Il est à noter que la Figure 13 est ambiguë : il y a non seulement un saut de phase, mais aussi un saut de pulsation puisque la pente de $_r(t)$ change à $t = 0$!

Nous avons :

$$\frac{\Phi_{err}(p)}{\Phi_r(p)} = 1 - \frac{\Phi_Q(p)}{\Phi_r(p)} = 1 - G(p) = \frac{p}{p + K_T F(p)} = \frac{p}{p + K_T \dfrac{1}{1+\tau p}} = \frac{p(1+\tau p)}{p(1+\tau p) + K_T} \quad \textbf{Éq. 32}$$

qui correspond à l'équation différentielle $\tau \frac{d^2\Phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\Phi_{err}}{dt} + K_T \Phi_{err} = \tau \frac{d^2\Phi_r}{dt^2} + \frac{d\Phi_r}{dt}$ **Éq. 33**

- Pour $t < 0$ et $t > 0$, la pulsation est la même constante $_r$:

$$\tau \frac{d^2\Phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\Phi_{err}}{dt} + K_T \Phi_{err} = \omega_r \quad \textbf{Éq. 34}$$

- Pour $t < 0$, la boucle est verrouillée à la pulsation $_r = \frac{d_r}{dt}$ et cela donne :

$$\Phi_{err}(t<0) = \frac{\omega_r}{K_T} \quad \textbf{Éq. 35}$$

- Pour $t > 0$, c'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti, qui finit par se stabiliser à la valeur finale :

$$\boxed{\Phi_{err}(t=+\infty) = \frac{\omega_r}{K_T} = \Phi_{err}(t<0)} \quad \textbf{Éq. 36}$$

: $_{err}$ reprend sa valeur initiale.

Est-ce en ce sens qu'il faut comprendre la phrase de l'énoncé : « *l'erreur de phase en sortie finit par s'annuler* » ? Car, sauf pour le verrouillage à $_0$, l'erreur de phase après le comparateur n'est jamais nulle (Cf. réponse à la question **17**).

Je trouve les notations de l'étude en régime linéaire ambiguës ou mal choisies.

Pour une pulsation d'entrée $\omega_r = \omega_0 + \Delta$, on a un déphasage au verrouillage Φ^0_{err} donné par la relation $\Delta = K \cos\left(\Phi^0_{err}\right)$ de la question **21**, avec $\sin\left(\Phi^0_{err} < 0\right)$ pour la stabilité : on est du côté du point A de la Figure 11 (Cf. question **18**)

La linéarisation de l'équation différentielle $\tau \frac{d^2\Phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\Phi_{err}}{dt} + K\cos\left(\Phi_{err}\right) = \Delta(t) + \tau \frac{d\Delta}{dt}$

de la question **20** en posant $\Phi_{err} = \Phi^0_{err} + \phi_{err}$ donne alors pour $_{err}$ petit :

$$\tau \frac{d^2\phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\phi_{err}}{dt} + K\cos\left(\Phi^0_{err}\right) - K\sin\left(\Phi^0_{err}\right)\phi_{err} = \tau \frac{d^2\phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\phi_{err}}{dt} + \Delta + K\left|\sin\left(\Phi^0_{err}\right)\right|\phi_{err} = \Delta + \tau \frac{d\Delta}{dt}$$

Avec $K_T = K\left|\sin\left(\Phi^0_{err}\right)\right|$, on obtient $\tau \frac{d^2\phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\phi_{err}}{dt} + K_T\phi_{err} = \tau \frac{d\Delta}{dt} = \tau \frac{d^2\Phi_r}{dt^2}$ qui est l'équation écrite au début de la question **28**, mais pour l'écart $_{err}$ et donc sans le terme $\frac{d\Phi_r}{dt} = \omega_r$

29. En suivant l'énoncé et l'équation $\tau \frac{d^2\Phi_{err}}{dt^2} + \frac{d\Phi_{err}}{dt} + K_T\Phi_{err} = \tau \frac{d^2\Phi_r}{dt^2} + \frac{d\Phi_r}{dt}$:

- pour $t < 0$, la boucle est verrouillée à la pulsation $_r = \frac{d_r}{dt}$ et cela donne :

$$\Phi_{err}(t<0)=\frac{\omega_r}{K_T}$$ **Éq. 37**

- pour $t > 0$, l'équation devient $\tau\frac{d^2\Phi_{err}}{dt^2}+\frac{d\Phi_{err}}{dt}+K_T\Phi_{err}=\omega_r+\Delta\omega_r$ oscillateur harmonique amorti qui finit par se stabiliser à la valeur finale :

$$\Phi_{err}\left(t=+\infty\right)=\frac{\omega_r+\Delta\omega_r}{K_T}=\Phi_{err}\left(t<0\right)+\frac{\Delta\omega_r}{K_T}$$ **Éq. 38**

$_{err}$ a varié et pris une nouvelle valeur correspondant à l'erreur de phase pour le verrouillage sur la nouvelle pulsation.

30. En cas de perte du signal GPS de référence, l'oscillateur continue à osciller sur sa fréquence $_0$ avec une bonne stabilité à court terme.

31. L'OCT doit être commandée par une tension. Il faut donc un convertisseur fréquence-tension, ce que réalise en fait la boucle à verrouillage de phase.

Partie V : Oscillateur non linéaire entretenu ; modèle électrique du balancier

Sur la Figure 14, il faut lire à la place de b.

32. On a :

$$i(t) = -GV\sin(\omega t) + \beta V^3 \frac{3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)}{4} = V\left(\left[-G + \frac{3\beta V^2}{4}\right]\sin(\omega t) - \frac{\beta V^2}{4}\sin(3\omega t)\right)$$ **Éq. 39**

Pour des tensions faibles, le terme de pulsation 3ω est petit. En outre, son importance sera négligeable si l'on travaille pour le quartz au voisinage de la pulsation de résonance.

Il reste alors bien $\boxed{i(t) \approx v\left(-G + \frac{3\beta V^2}{4}\right)}$ **Éq. 40**

33. En régime sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude V, l'admittance *totale des 4 éléments en parallèle* vaut alors :

$$Y = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega + G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 = \boxed{Y = G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$ **Éq. 41**

En régime sinusoïdal entretenu, l'intensité complexe *totale* $\underline{i} = Y\underline{v}$ est nulle alors que $\underline{v} \neq 0$: on doit donc avoir $Y = 0$ ce qui donne bien :

$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$ **et** $\boxed{V = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{G - G_0}{\beta}} = \sqrt{\frac{4g}{3\beta}} = V_0}$. **Éq. 42**

Et il faut donc $G > G_0$, ce que ne précise pas l'énoncé.

34. En régime de petits signaux, c.à.d. pour V petit, la partie réelle de :

$Y = G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2 \approx G_0 - G$ est *négative* : il y aura augmentation de l'amplitude et l'oscillateur démarre.

35. On a $V\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \approx V(t) + \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{dV}{dt}$, et pour l'énergie proportionnelle à V^2 :

$W\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \approx W(t) + 2\frac{2\pi}{\omega_0}\frac{W(t)}{V(t)}\frac{dV}{dt}$ soit encore $\frac{2\pi}{Q} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{2}{V(t)}\frac{dV}{dt}$ et donc :

$$\boxed{\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{3\beta\left(V_0^2 - V^2\right)}{8C}}$$ **Éq. 43**

L'énergie dans LC s'écrit $\frac{1}{2}Cv^2 + \frac{1}{2}Li_L^2$ avec $v = L\frac{di_L}{dt}$

Sa valeur moyenne en régime sinusoïdal de pulsation $_0$ est $W = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI_L^2$ avec les amplitudes (variant lentement) I_L et $V = L\omega_0 I_L$; on a donc :

$$W = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{V}{L\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2}CV^2$$ **Éq. 44**

Elle est dissipée dans la conductance G_0 et la conductance négative :

$\frac{dW}{dt} = -\Re(Y)\langle v^2\rangle = -\frac{1}{2}\Re(Y)V^2$, ce qui donne $\frac{dW}{dt} = CV\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}\left(G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2\right)V^2$ ou encore $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2C}\left(G_0 - G + \frac{3}{4}\beta V^2\right) = -\frac{3\beta}{8C}\left(\frac{4}{3\beta}(G_0 - G) + V^2\right) = \frac{3\beta}{8C}\left(V_0^2 - V^2\right)$; CQFD **Éq. 45**

36. Si $V_i < V_0$: $0 < \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0}$ et si $V_i > V_0$: $0 > \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0}$

Si V a une limite pour $t \to +\infty$: $\frac{dV}{dt} = 0$ donne dans l'équation différentielle précédente $V = V_0$ **Éq. 46**

37. Pour le circuit en l'absence de source :

Loi de nœuds : $0 = -Gv + \beta v^3 + G_0 v + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int v\,dt$ soit $0 = -G\ddot{v} + 3\varphi v^2\ddot{v} + G_0\ddot{v} + C\dddot{v} + \frac{v}{L}$ ce qui donne bien $\dddot{v} - \ddot{v}\left(\frac{G - G_0}{C} - \frac{3\beta}{C}v^2\right) + \frac{v}{LC} = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\gamma = \frac{G - G_0}{C}$ et $\varepsilon = \sqrt{\frac{3\beta}{G - G_0}} = \frac{2}{V_0}$

38. L'énoncé parle de *temps* de basculement pour 2η, alors que η défini sur la Figure 15 est une *tension* !

Et il y a une erreur de signe dans la relation intégrale concernant les aires.

La relation entre i' et v s'écrit : $i' = I_0\left(\frac{v}{\sqrt{g/\beta}} \mp 1\right)$ suivant le signe ± de v ou i'.

Loi des nœuds : $-i' = C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int v\,dt = -I_0\left(\frac{v}{\sqrt{g/\beta}} \mp 1\right)$ d'où en dérivant :

$C\ddot{v} + \frac{v}{L} = -I_0\frac{\dot{v}}{\sqrt{g/\beta}}$ ou $\ddot{v} + \frac{I_0}{C}\frac{\dot{v}}{\sqrt{g/\beta}} + \frac{v}{LC} = 0$ **Éq. 47**

et donc : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\alpha = \frac{I_0}{2C\sqrt{g/\beta}}$

39. L'équation caractéristique $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$ donne $p = \alpha \pm i\Omega$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$: on a un régime pseudo-sinusoïdal amorti.

Compte tenu des conditions initiales : $\boxed{v(t)=\frac{S_0}{\Omega}e^{-\alpha t}\sin(\Omega t)}$. **Éq. 48**

On a $\dot{v}(t)=\frac{S_0}{\Omega}e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin(\Omega t)+\Omega\cos(\Omega t)\right)$ et par suite $\boxed{\dot{v}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)_-=-S_0e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}<0}$ <u>négatif</u>

40. À $t=\frac{\pi}{\Omega}$ l'intensité est continue dans l'inductance. Au passage de v par zéro, elle passe de $-I_0$ à I_0 dans le bloc « pertes & entretien », et subit donc la discontinuité opposée dans la capacité. L'intensité dans cette dernière étant reliée à v par $i_c=C\frac{dv}{dt}$, on en déduit la discontinuité de $\dot{v}$: $\boxed{\Delta(\dot{v})=-\frac{2I_0}{C}}$ **Éq. 49**

41. Et donc : $\dot{v}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)_+=S_1=-S_0e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}-\frac{2I_0}{C}$

Pour $t\in\left[\frac{\pi}{\Omega},\frac{2\pi}{\Omega}\right]$: $v(t)=-\frac{S_1}{\Omega}e^{-\alpha\left(t-\frac{\pi}{\Omega}\right)}\sin(\Omega t)$ et $\dot{v}\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)_-=-S_1e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}$

La discontinuité de $\dot{v}$ est cette fois-ci $\boxed{\Delta(\dot{v})=\frac{2I_0}{C}}$ d'où : $\dot{v}\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)_+=S_2=-S_1e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}+\frac{2I_0}{C}$

Et par récurrence : $\dot{v}\left((n+1)\frac{\pi}{\Omega}\right)_+=\boxed{S_{n+1}=-S_ne^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}-(-1)^n\frac{2I_0}{C}}$ **Éq. 50**

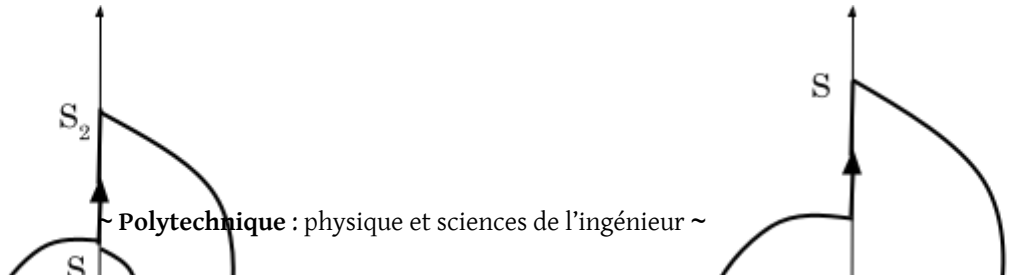
42. Alors $S_n=(-1)^nS_0e^{-n\frac{\pi\alpha}{\Omega}}+(-1)^n\frac{2I_0}{C}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\frac{\pi\alpha}{\Omega}}$

$S_n=(-1)^n\frac{2I_0}{C}\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}}$

ce qui donne quand $n\to+\infty$: , dont la valeur absolue est l'amplitude du régime permanent $\boxed{S_\infty=\frac{2I_0}{C}\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi\alpha}{\Omega}}}}$ **Éq. 51**

43. Dans le plan $(v,\dot{v})$, on a des arcs de spirales d'un demi-tour chacun, qui relient chaque demi-axe des $\dot{v}$, et l'on passe d'un arc à l'autre par une translation $\pm\frac{2I_0}{C}$ sur cet axe.

On a représenté à gauche la mise en route depuis S_0 petit avec augmentation progressive de l'amplitude, et à droite le cycle en régime permanent.



**

*

Remarque : Bien que relu, ce corrigé n'est probablement pas exempt d'erreurs de calcul, d'interprétation ou pire de compréhension !