

ICNA 2008 - CORRIGE	
1 D	$j_1 = j_2 \frac{R_1^2}{R_3^2 - R_2^2}$ $I = j_1 \pi R_1^2 = j_2 \pi (R_3^2 - R_2^2) \text{ d'où}$
2 C	On suppose le câble infini, alors par symétrie et invariances, on a $\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\phi$ et $\vec{A} = A(\rho)\vec{e}_z$.
3 AC	$B(\rho) = \frac{\mu_0 j_1 \rho}{2} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2}$ On applique le théorème d'Ampère à un cercle de rayon $\rho < R_1$; cela donne : De $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et de la question 2 on déduit : $B(\rho) = -\frac{dA(\rho)}{d\rho}$ d'où en intégrant (et avec $A(0)=0$) cela $A(\rho) = -\frac{\mu_0 j_1 \rho^2}{4} = -\frac{\mu_0 I \rho^2}{4\pi R_1^2}$ donne :
4 AC	$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} = \frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{2\rho}$ De même, le théorème d'Ampère au cercle de rayon $R_1 < \rho < R_2$ donne : Puis $B(\rho) = -\frac{dA(\rho)}{d\rho}$ s'intègre en (avec $A(R_1) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$) : $A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2 \ln \frac{\rho}{R_1} + 1 \right) = -\frac{\mu_0 j_1 R_1^2}{4} \left(2 \ln \frac{\rho}{R_1} + 1 \right)$
5 E	De même, le th. d'Ampère au cercle de rayon $R_2 < \rho < R_3$ donne : $B(\rho)2\pi\rho = \mu_0 \left(I - j_2 \pi (\rho^2 - R_2^2) \right)$ soit $B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left(\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$ Puis $B(\rho) = -\frac{dA(\rho)}{d\rho}$ et $A(R_2) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2 \ln \frac{R_2}{R_1} + 1 \right)$ donne : $A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi (R_3^2 - R_2^2)} \left(2R_3^2 \ln \frac{\rho}{R_2} + R_3^2 - \rho^2 + 2 \ln \frac{R_2}{R_1} (R_3^2 - R_2^2) \right)$ ou $A(\rho) = -\frac{\mu_0 j_2}{4} \left(2R_3^2 \ln \frac{\rho}{R_2} + R_3^2 - \rho^2 + 2 \ln \frac{R_2}{R_1} (R_3^2 - R_2^2) \right)$
6 C	$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$ Enfin, pour $\rho > R_3$, on a $B(\rho)=0$ et
7 AC	Le phénomène d'induction a lieu dans les conducteurs plongés dans le champ magnétique variable, donc dans les milieux conducteurs que sont l'âme et la gaine.
8 AB	Les sources de champ électrique sont les courants variables, les invariances et symétries de $\vec{E}$ sont les mêmes que celles de $\vec{A}$ donc $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_z$ et $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$ (pas de potentiel électrostatique car pas de charge) : les expressions de $\vec{E}$ sont donc celles de $\vec{A}$ en remplaçant I par $I_0 \omega \sin(\omega t)$ ou $-\frac{di}{dt}$:

	$E(\rho) = -\frac{\mu_0 \rho^2}{4\pi R_1^2} I_0 \omega \sin(\omega t)$ $0 < \rho < R_1 :$ $E(\rho) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(2 \ln \frac{\rho}{R_1} + 1 \right) I_0 \omega \sin(\omega t)$ $R_1 < \rho < R_2 :$ $E(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2R_3^2}{(R_3^2 - R_2^2)} \ln \frac{\rho}{R_2} + \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} + 2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{di}{dt}$ $R_2 < \rho < R_3 :$ $E(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{(R_3^2 - R_2^2)} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{di}{dt} \neq 0$ $\rho > R_3 :$
9 AC	La puissance électrique apparaît dans les conducteurs donc dans l'âme et la gaine.
10 E	Pour un élément de câble (compris entre deux cylindres de rayons ρ et $\rho+d\rho$ et de longueur unité) la $dr = \frac{1}{\gamma S}$ puissance dissipée par effet Joule est $dp_j = dr i_r^2$ avec $i_r = j_r S$ et $j_r = \gamma E$ (mais j_r ne devrait-il pas être alors uniforme dans l'âme et la gaine, alors que E ne l'est pas ?!) ce qui donnerait : $dp_j = \gamma E^2 S = \gamma E^2 2\pi \rho d\rho$. Mais cette formule ne peut s'appliquer que là où il y a des conducteurs, donc la réponse C) n'est pas bonne. Comme les expressions de E sont en $\sin(\omega t)$, $p_L = K \sin^2(\omega t)$ et la valeur moyenne de p_j sera $K/2$, mais ce n'est pas $p_j/2$.
11 BD	$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}$ $p = \rho r T$ (loi des GP) donne Or $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ (loi de l'hydrostatique des fluides) d'où $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{\rho g}{p} = -\frac{g}{rT}$
12 C	Si $T = T_0$ alors $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{g}{rT_0}$ donc $\rho(z) = \rho(0) e^{-\frac{gz}{rT_0}}$ et $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ s'intègre en $p(z) = p(0) e^{-\frac{gz}{rT_0}}$
13 B	On garde $p(z) = p(0) e^{-\frac{gz}{rT_0}}$ et comme $p(z) = k(\rho(z))^\gamma$ cela donne $\rho(z) = \left(\frac{p(0)}{k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{gz}{\gamma r T_0}}$ et $T(z) = \frac{p(z)}{r \rho(z)} = \frac{k^{\frac{1}{\gamma}} (p(0))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{r} \exp \left[-\frac{(\gamma-1)gz}{\gamma r T_0} \right] = T_0 \exp \left[-\frac{(\gamma-1)gz}{\gamma r T_0} \right] \approx T_0 \left(1 + \frac{(1-\gamma)gz}{\gamma r T_0} \right)$
14 B	En régime permanent, $\text{div}(\vec{j}) = 0$ donc dans le fluide entourant la sphère de rayon R, la puissance traversant une sphère de rayon $r > R$ est la même quelque soit r et vaut la puissance totale dégagée par la sphère d'où : $\Phi = j(r) 4\pi r^2 = P \frac{4\pi R^3}{3}$ soit $j(r) = P \frac{R^3}{3r^2}$
15 A	$j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{PR^3}{3r^2} \quad d'où \quad T(r) = T(\infty) + \frac{PR^3}{3\lambda r}$
16 D	$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi} = \left \frac{PR^3}{3\lambda} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{3}{4\pi R^3 P} \right = \frac{1}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

17 BC	A l'état initial : $T_A = T_{atm}$; $p_A = p_{atm} + M_p g / S$ et le volume est V_A. A l'état final, la transformation étant isochore : $V_B = V_A$, de plus $T_B = T_S$ d'où $p_B = p_A \cdot T_S / T_{atm}$. Pour une transformation isochore $dU = TdS = mc_v dT$ (car GP et c_v massique), d'où : $\Delta S_{AB} = \frac{mr}{\gamma - 1} \ln \frac{T_S}{T_{atm}} = \frac{mr}{\gamma - 1} \ln \frac{p_B}{p_A}$
18 D	L'entropie produite au cours de la transformation est la somme de celle fournie au gaz ΔS_{AB} et celle fournie à la source de chaleur S_s. Or la source de chaleur fournit au gaz $Q_{AB} = \Delta U_{AB}$ (transf. isochore) = $mc_v(T_S - T_{atm})$. Elle reçoit donc $S_s = -\frac{mr}{\gamma - 1} \frac{T_S - T_{atm}}{T_S} \quad S_p = \frac{mr}{\gamma - 1} \left(\ln \frac{T_S}{T_{atm}} - \frac{T_S - T_{atm}}{T_S} \right)$ l'opposé et son entropie reçue est d'où
19 C	Pour que le piston ne bouge pas lorsqu'on le débloque il faut que $p_{atm} + \frac{M + M_p}{S} g = p_B = \frac{T_S}{T_{atm}} \left(p_{atm} + \frac{M_p}{S} g \right) \quad \text{soit} \quad M = \left(\frac{p_{atm} S}{g} + M_p \right) \left(\frac{T_S}{T_{atm}} - 1 \right)$
20 A	A l'état final : température T_C ; $p_C = p_A = p_{atm} + M_p g / S$ et volume V_C. La transformation est adiabatique donc $\Delta U_{BC} = W_{BC}$ soit $mc_v(T_C - T_S) = p_A(V_B - V_C)$ et comme $p_A V_C = mr T_C$ $T_C = \frac{1}{\gamma} (T_S + (\gamma - 1) T_{atm})$ on obtient après simplifications :
21 BC	L'image est à l'infini, elle est réelle et inversée.
22 A	A'_2 est en F'_2 donc $p'_2 = f_2$. $\frac{\overline{A'_2 B'_2}}{\overline{A_1 B_1}} = -\frac{f_2}{f_1}$ Le grandissement total est $G = G_1 \times G_2 = \frac{\overline{A'_2 B'_2}}{\overline{A_1 B_1}} = -\frac{f_2}{f_1}$ en utilisant les rayons non déviés ce qui rend les triangles $A_1 B_1 O_1$ et $A'_2 B'_2 O_2$ semblables.
23 E	(L_3) est placée entre (L_1) et (L_2), donc le schéma est le suivant : $A_1 = F_1 \rightarrow A'_1 = A_\infty = A_3 \rightarrow A'_3 = F'_3 = A_2 \rightarrow A'_2 = \text{image de } F'_3 \text{ par } (L_2) \text{ qui n'est ni } F_2 \text{ ni } F'_2$. p_3 est infini et p'_3 est fini.
24 B	Pour le montage 1, $p'_2 = f_2 = 15 \text{ cm}$; Pour le montage 2, $p'_2 = f_2 p_2 / (f_2 + p_2)$; A_3 est à l'infini donc $p'_3 = - f_3$ et $p_2 = -f_2 - f_3 = -35 \text{ cm}$; d'où $p'_2 = 26,25 \text{ cm}$ et $D_1 = 26,25 - 15 = 11,25 \text{ cm}$. $(G_1)_2 = p'_2 / p_2 = f_2 / (f_2 + p_2) = -3/4$.
25 AD	$p_2 = -35 \text{ cm}$ et $p'_2 = 26,25 \text{ cm}$.
26 AC	Comme auparavant : (L_4) est placée entre (L_1) et (L_2), donc le schéma est le suivant : $A_1 = F_1 \rightarrow A'_1 = A_\infty = A_4 \rightarrow A'_4 = F'_4 = A_2 \rightarrow A'_2 = \text{image de } F'_4 \text{ par } (L_2)$. $p_2 = -f_2 + f_4 = 5 \text{ cm} > 0$ donc l'objet de L_2 est virtuel ; d'où $p'_2 = f_2 p_2 / (f_2 + p_2) = 3,75 \text{ cm} > 0$ donc l'image de L_2 est réelle ; $p'_4 = f_4 > 0$ donc l'image de L_4 est réelle ; $F'_4 \neq F_2$ donc l'ensemble $L_2 + L_4$ n'est pas afocal.
27 A	$D_2 = 3,75 - 15 = -11,25 \text{ cm}$. $(G_1)_2 = p'_2 / p_2 = 3,75 / 5 = 3/4$.
28 B	$f_5 = 10 \text{ cm}$. Comme auparavant : (L_5) est placée entre (L_1) et (L_2), donc le schéma est le suivant : $A_1 = F_1 \rightarrow A'_1 = A_\infty = A_5 \rightarrow A'_5 = F'_5 = A_2 \rightarrow A'_2 = \text{image de } F'_5 \text{ par } (L_2)$. $p_2 = -f_2 + f_5 = -5 \text{ cm} < 0$ donc l'objet de L_2 est réel ; d'où $p'_2 = f_2 p_2 / (f_2 + p_2) = -7,5 \text{ cm} < 0$ donc l'image de L_2 est virtuelle ; $p'_5 = f_5 > 0$ donc l'image de L_5 est réelle ; $F'_5 \neq F_2$ donc l'ensemble $L_2 + L_5$ n'est pas afocal.

29 D	$D_3 = -7,5 - 15 = -22,5 \text{ cm.}$ $(G_1)_2 = p'_2 / p_2 = -7,5/(-5) = 3/2.$
30 D	Le théorème de Huygens donne $I_{O_V} = I_{G_V} + M(a/2)^2$, ce qui fait $I_{O_V} = Ma^2/3$.
31 C	$Mg \frac{a}{2} \sin \varphi = M \frac{a^2}{3} \ddot{\varphi} - \frac{3g}{2a} \sin \varphi = 0$ Le TMC en O projeté sur Oy donne :
32 CD	$E_p = Mg \frac{a}{2} (\cos \varphi - 1)$ car référence prise en pour $\varphi=0$. $E_c = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 = \frac{Ma^2}{6} \dot{\varphi}^2$ car rotation autour de Oy.
33 B	$\frac{dE_p}{d\varphi} = -Mg \frac{a}{2} \sin \varphi = 0$ $\Leftrightarrow$ équilibre pour $\varphi = 0$ (instable car dérivée seconde <0) ou pour $\varphi = \pi$ (stable car dérivée seconde >0).
34 E	Les petites oscillations existent autour de la position d'équilibre stable, donc pour $\varphi = \pi + \varepsilon$. En remplaçant $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2a} \varepsilon = \ddot{\varphi} + \frac{3g}{2a} (\varphi - \pi) = 0$ dans l'équation différentielle, on trouve :
35 B	La pulsation vaut $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$. Le TRD donne : $\vec{R} = Ma \vec{a}_G + Mg \vec{e}_{z_0}$. A part à l'équilibre, $\vec{a}_G \neq 0$ et varie sinusoïdalement au cours du temps, donc $\vec{R} \neq Mg \vec{e}_{z_0}$ et $\vec{R} \neq 0$.
36 B	$\pi = \rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} g \vec{e}_{z_0} = \frac{1}{d} \frac{M}{bea} \left(be \frac{h}{\cos \varphi} \right) g \vec{e}_{z_0} = Mg \frac{h}{ad \cos \varphi} \vec{e}_{z_0}$. La poussée d'Archimède vaut On assimile le volume immergé à un parallélépipède de côtés b, e et $h/\cos \varphi$. <i>Comment savoir si on doit faire une approximation dans un QCM ? Dans un problème classique, on l'écrit et le correcteur peut en tenir compte ; dans un QCM si la solution supposait l'approximation et que vous ne l'avez pas faite ou le contraire, vous avez automatiquement faux. Je trouve cela inadmissible. OK c'est le problème même des QCM, mais c'est la première fois que je rencontre cette ambiguïté due à une possible approximation.</i>
37 B	Le centre de poussée est le centre de masse du volume immergé (car la plaque est homogène), donc avec la même approximation qu'au-dessus, on a $OP = h/(2\cos \varphi)$.
38 A	$Mg \frac{a}{2} \sin \varphi + Fa \cos \varphi - \frac{Mgh}{ad \cos \varphi} OP \sin \varphi = 0$ Le TMC en O projeté sur Oy donne (à l'équilibre) : d'où $F = \frac{Mg}{2} \tan \varphi \left(-1 + \frac{h^2}{a^2 d \cos^2 \varphi} \right)$
39 D	Si $F=0$, on a équilibre pour $\varphi = 0, \pi, \phi_1$ et $-\phi_1$, où $\phi_1 = \text{Arccos}(h/(ad^{1/2}))$, donc 4 positions d'équilibre. On regarde ce que donne l'équation différentielle au voisinage de chaque position d'équilibre.
40 AD	Pour $\varphi = \varepsilon$, on obtient $\frac{Mg}{2} \left(a - \frac{h^2}{ad} \right) \varepsilon - J \ddot{\varepsilon} = 0$ donc équilibre instable car $a^2 > \frac{h^2}{d}$ (a suffisamment grand). Pour $\varphi = \pi + \varepsilon$, on obtient $\frac{Mg}{2} \left(a - \frac{h^2}{ad} \right) (-\varepsilon) - J \ddot{\varepsilon} = 0$ donc équilibre stable.

	$\frac{Mga}{2} \left(1 - \sqrt{d} \left[\frac{\sqrt{a^2 d - h^2}}{h} + \left(2 \frac{a^2 d}{h^2} - 1 \right) \varepsilon \right] \right) - J_{\theta} = 0$ Pour $\phi = \phi_1 + \varepsilon$, on obtient $\sin(\phi_1 + \varepsilon) \cos^{-2}(\phi_1 + \varepsilon) = a \sqrt{d} \left[\frac{\sqrt{a^2 d - h^2}}{h} + \left(2 \frac{a^2 d}{h^2} - 1 \right) \varepsilon \right]$ au premier ordre en ε. donc équilibre stable, on a
	$\frac{Mga}{2} \left(1 + \sqrt{d} \left[\frac{\sqrt{a^2 d - h^2}}{h} + \left(2 \frac{a^2 d}{h^2} + 3 \right) \varepsilon \right] \right) - J_{\theta} = 0$ Pour $\phi = -\phi_1 + \varepsilon$, on obtient $\sin(-\phi_1 + \varepsilon) \cos^{-2}(-\phi_1 + \varepsilon) = a \sqrt{d} \left[-\frac{\sqrt{a^2 d - h^2}}{h} + \left(-2 \frac{a^2 d}{h^2} + 3 \right) \varepsilon \right]$ au premier ordre en ε. donc équilibre stable, on a