

**Bài 1: (2,0 điểm)**

Cho 
$$P = \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

a/ Rút gọn biểu thức P

b/ Tìm x để  $P = \frac{2}{7}$

c/ So sánh  $P^2$  với  $2P$

**Bài 2 (2,0 điểm)**

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

1/ Giải phương trình:

2/ Trên một mặt phẳng tọa độ, cho các điểm M(2; 1), N(3; -4), P(5; 3) lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA của tam giác ABC.

a/ Viết phương trình của đường thẳng AB; BC.

b/ Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

**Bài 3 (2,0 điểm)**

1/ Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$

2/ Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng: Tổng của số đó với các chữ số của nó bằng 2023

**Bài 3 (3,0 điểm)**

Cho đường tròn (O;R) cố định, đường kính AB. Lấy điểm I nằm trên tia đối của BA, kẻ tiếp tuyến IC (C là tiếp điểm). Gọi M là 1 điểm cố định thuộc nửa đường tròn đường kính AB không chứa điểm C (M khác A;B). Gọi N là giao điểm thứ 2 của IM với (O); H là hình chiếu của C trên AB; K là hình chiếu của O trên IM, E là giao điểm của CH và OK.

a/ Chứng minh:  $IC^2 = IA \cdot IB$

b/ Chứng minh:  $IH \cdot IO = IM \cdot IN$

c/ Khi I di động trên tia đối của BA, hãy tìm quỹ tích điểm E.

**Bài 5 (1,0 điểm)**



$\Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 1 \Rightarrow P = \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$ <p>Ta có <math>P^2 - 2P = P(P - 2) \leq 0</math> (vì <math>0 &lt; P \leq 2</math>) <math>\Rightarrow P^2 \leq 2P</math>          Vậy <math>P^2 \leq 2P</math></p>	
---	--

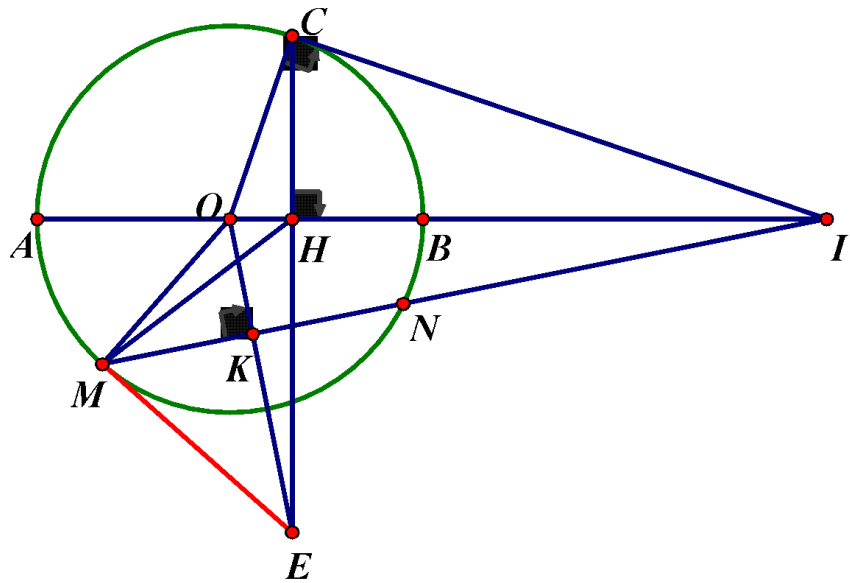
**Bài 2 (2,0đ):**

Ý	Đáp án	Điểm
1/	$\text{ĐK: } \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$ <p>TH1: <math>-1 \leq x &lt; 0</math>. VT &lt; 0; VP &gt; 0 nên PT vô nghiệm.</p> <p>TH2: <math>x \geq 1</math>. PT: <math>x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}}</math></p> $\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - x = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x-1)} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(x-1)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (vì } x \geq 1)$ <p>Vậy <math>S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}</math></p>	0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ
2-a/	<p>+ Viết được phương trình của đường thẳng MP là <math>y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}</math></p> <p>+ Đường thẳng BC song song với MP nên phương trình có dạng <math>y = \frac{2}{3}x + b</math>. Vì N thuộc đường thẳng BC tìm ra <math>b = -6</math>. Vậy phương trình của đường thẳng BC là <math>y = \frac{2}{3}x - 6</math>.</p>	0,25đ  0,25đ



	<p>TH2: <math>a=2</math>.</p> <p>Thay vào (1) ta được: <math>\overline{2bcd} + 2 + b + c + d = 2023 \Rightarrow \overline{bcd} + b + c + d = 21</math> (4)</p> <p><math>\Rightarrow \overline{bcd} = 21 - (b + c + d) &lt; 21 - (0 + 0 + 0) = 21 &lt; 100</math> nên <math>b=0</math>.</p> <p>Thay vào (4) ta được: <math>\overline{0cd} + 0 + c + d = 21 \Rightarrow \overline{cd} + c + d = 21</math> (5)</p> <p><math>\Rightarrow \overline{cd} = 21 - (c + d) &lt; 21 - (0 + 0) = 21</math> nên <math>c=0;1;2</math>.</p> <p>+ Nếu <math>c=0</math>. Thay vào (5) ta được: <math>\overline{0d} + 0 + d = 21 \Rightarrow d + d = 21 \Rightarrow d = 10,5</math>  <math>\Rightarrow</math> (loại).</p> <p>+ Nếu <math>c=1</math>. Thay vào (5) ta được: <math>\overline{1d} + 1 + d = 21 \Rightarrow d + d = 10 \Rightarrow d = 5</math>          Suy ra số cần tìm là: 2015.</p> <p>+ Nếu <math>c=2</math>. Thay vào (5) ta được: <math>\overline{2d} + 2 + d = 21 \Rightarrow d + d = -1 \Rightarrow</math> (loại).</p> <p>Vậy có 2 số tmycbt là: 1997 và 2015.</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
--	---	--

**Bài 4 (3,0đ):**

Ý	Đáp án	Điểm
		<p>0,25đ</p>
a/	<p>Chứng minh: <math>IC^2 = IA \cdot IB</math></p> <p>Chỉ ra: <math>IC^2 = IO^2 - OC^2 = IO^2 - OA^2 = (IO + OA)(IO - OA) = IA \cdot IB \Rightarrow</math> đpcm.</p>	<p>0,75</p>
b/	<p>Chứng minh: <math>IH \cdot IO = IM \cdot IN</math></p> <p>Chỉ ra: <math>\triangle OCI</math> vuông tại C, đường cao CH nên <math>IC^2 = IH \cdot IO</math> (1)</p> <p>Chỉ ra: <math>IM \cdot IN = (IK + KM)(IK - KN) = IK^2 - KM^2</math>  <math>= IK^2 - (OA^2 - OK^2) = (IK^2 + OK^2) - OA^2 = IO^2 - OA^2</math></p>	<p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p>

	$= (IO + OA)(IO - OA) = IA \cdot IB = IC^2 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra: <math>IH \cdot IO = IM \cdot IN \Rightarrow đpcm.</math></p>	0,25đ
c/	Khi I di động trên tia đối của BA, hãy tìm quỹ tích điểm E. + Chỉ ra: $\triangle OHE$ đồng dạng với $\triangle OKI$ suy ra $OK \cdot OE = OH \cdot OI$ (3) + $\triangle OCI$ vuông tại C, đường cao CH nên $OH \cdot OI = OC^2 = OM^2$ . (4) + Từ (3); (4) suy ra: $OK \cdot OE = OM^2$ . Chỉ ra $\triangle OKM$ đồng dạng với $\triangle OME$ .	0,25đ
	Nên $\angle OME = \angle OKM = 90^\circ$ suy ra: $ME \perp OM$ .	0,25đ
	Vì (O); AB; M cố định nên đường thẳng đi qua M và vuông góc với OM cũng cố định tức là đường thẳng ME cố định. Nên quỹ tích điểm E là nằm trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với OM.	0,25đ
	Giới hạn quỹ tích: Phần đường thẳng ME nằm giới hạn giữa 2 đường tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B.	0,25đ

**Bài 5 (1,0đ):** Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn  $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$ . Chứng minh a; b là 2 số chính phương liên tiếp. **(1đ SX)**

Ý	Đáp án	Điểm
	Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a$ $\Leftrightarrow (a - b + 1)^2 = 4a$ . Suy ra $a \geq 0$ .	0,25đ
	$(a - b + 1)^2 = 4a$ là số chính phương suy ra a là số chính phương Nên đặt $a = x^2$ (x là số nguyên). Khi đó:	0,25đ
	$(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - b + 1 = \pm 2x$	0,25đ
	$\Leftrightarrow b = (x \mp 1)^2$	0,25đ
	Ta thấy x và (x+1) hoặc (x-1) và x là các số nguyên liên tiếp. Suy ra: $x^2$ và $(x+1)^2$ hoặc $(x-1)^2$ và $x^2$ là các số chính phương liên tiếp. Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp	

**Ghi chú:** Các cách giải khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.