

УТВЕРЖДЕНО

заместитель председателя оргкомитета
третьего этапа республиканской
олимпиады, заместитель начальника
управления образования Могилевского
облисполкома

С.В. Леонова

«2» декабря 2008 г.

Задания для II этапа республиканской олимпиады
по математике
6 декабря 2008 года

9 класс

1. Укажите все числа x и y , удовлетворяющие равенству:
 $x^2y + 2y^2 + 2xy - 10x - 20 + 50 = 0$.
2. Из прямоугольного листа клетчатой бумаги вырезано две клетки так, как показано
а) на рис. 1;
б) на рис. 2.

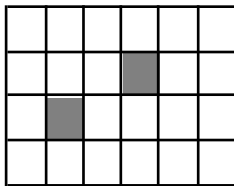


рис. 1

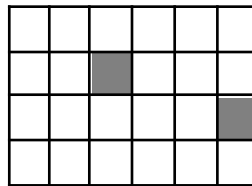


рис. 2

Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники размера 1×2 ?

3. a , b , c – стороны треугольника. Доказать, что $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.
4. Некоторая комиссия проводила свои заседания 40 раз. Каждый раз в заседании принимали участие 10 человек, и любые двое членов комиссии заседали вместе не более одного раза. Доказать, что в комиссию входит не менее 60 человек.
5. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC . На продолжении сторон BA и AC (за точками A и C) выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства: $AD=AB$ и $CE=CM$. Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны.

Указания к решению

9 класс

1. **Ответ:** $x = 5$, $y = -2$.

Решение: Разложим выражение, стоящее слева на множители:

$(x-5)^2(y+2) = 0$, откуда получаем единственную пару чисел
 $x = 5$, $y = -2$.

2. . *Решение:* а) Лист, изображенный на рис. 1, можно разрезать, например, следующим образом:

		-	-	-	-
			■	-	-
	■				
	-	-			

б) Лист, который изображен на рис. 2, нельзя разрезать на такие прямоугольники. Действительно, применим шахматную раскраску:

б	ч	б	ч	б	ч
ч	б	■	б	ч	б
б	ч	б	ч	б	■
ч	б	ч	б	ч	б

Видно, что вырезаны две черных клетки. Осталось 12 белых и 10 черных клеток. Так как один прямоугольник покрывает одну черную

и одну белую клетки, то разрезать оставшуюся часть на прямоугольники 1×2 нельзя.

3. Решение:

пользуясь формулами сокращенного умножения и неравенством треугольника, преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = \\ &= c(a^2 - ab + b^2 + 3ab) = c(a+b)^2 > c^3 \end{aligned}$$

4. Решение:

На одном заседании из 10 человек присутствует 45 пар. По условию таких сочетаний было 40, причем одна и та же пара заседала вместе не более одного раза, т.е. различных пар было $45 \cdot 40 = 1800$. Пусть в комиссию входит x человек. Если предположить, что $x \leq 60$, то

различных пар в ней равно $\frac{x(x-1)}{2} \leq \frac{60 \cdot 59}{2} < 1800$. Это означает, что не выполняется условие задачи. Значит предположение неверное, т.е. в комиссию входит более 60 человек.

5. Решение:

1) Построим точку К так, что $KA=AM$ (К лежит на прямой АС)

2) $\triangle ВМК$ – равнобедренный ($BM=KM=2a$). $\angle BKM = \angle KBM = \alpha$.

3) $\triangle ВМЕ$ – равнобедренный ($BM=EM=2a$). $\angle EBM = \angle BEM = \beta$.

4) $\angle EMB = \pi - 2\beta$, $\angle KMB = \pi - 2\alpha$. Тогда $\pi - 2\beta + \pi - 2\alpha = \pi$, откуда

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

5) $\angle KBE = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

6) Четырехугольник КВМД – параллелограмм, так как по построению диагонали делятся точкой пересечения пополам.

Значит $KB \parallel DM$. Так как $KB \perp BE$, то $DM \perp BE$.

