



DEVOIR EN CLASSE 3

Nom, Prénom et classe

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln \ln x$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$$

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$

d. Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique que l'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$

c. Montrer que

$$\ln \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$$

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0; 1]$ par

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln \ln x$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; 1]$ puis vérifier que

$$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0; \frac{1}{\alpha}[$, on a

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0; 1]$. Les images et les limites sont demandées.

Tournez la page SVP

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a .

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n < 2$$

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

```
def u(a,n):
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

1. Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit $u(2,1)$ et $u(2,2)$ dans la console Python.

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_n = \ln \ln (u_n - 1)$$

1. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a

b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 + e^{2^n \times \ln \ln (a-1)}$$

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n) .