

## PREMIER PROBLEME : OSCILLATIONS MECANQUES

*Première partie : Oscillateur harmonique non amorti*

1. Equation différentielle du mouvement

1.1 Dans R galiléen, la masse m est soumise à :

- son poids :  $mg \vec{u}_x \vec{u}_x$

- la force de rappel du ressort :  $-k(x-x_0) \vec{u}_x \vec{u}_x$

La poussée d'Archimède est négligeable dans l'air.

La deuxième loi de Newton donne :  $m \vec{a}(G/R) = \vec{F}_{ext} \vec{a}(G/R) = \vec{F}_{ext}$

En projection sur l'axe Ox, on obtient l'équation différentielle vérifiée par x :

$$(1) \quad m\ddot{x} = mg - k(x - x_0) \quad m\ddot{x} = mg - k(x - x_0)$$

A l'équilibre, on a :

$$(2) \quad 0 = mg - k(x_{eq} - x_0) \quad 0 = mg - k(x_{eq} - x_0) \quad \text{d'où } x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k}$$

1.2 Si on fait (1) - (2), on obtient : (3)  $m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}) \quad m\ddot{x} = -k(x - x_{eq})$

D'où  $\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} \quad 2\pi\sqrt{m/k}$

1.3 la solution de l'équation (3) s'écrit :  $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{eq}$

A  $t = 0$ ,  $x = x_{eq}$  et  $v = v_0$  d'où  $x(t) = (v_0/\omega_0) \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$

*Deuxième partie : Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide*

2. Période de l'oscillateur non amorti

Les oscillations libres correspondent à l'étude précédente avec  $m = \rho V$  donc

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/\rho V} \quad \sqrt{k/\rho V}$$

3. Détermination de la masse volumique du liquide

Dans R galiléen, la masse m est soumise à :

- son poids :  $\rho V g \vec{u}_x \vec{u}_x$

- la force de rappel du ressort :  $-k(x-x_0) \vec{u}_x \vec{u}_x$

- la poussée d'Archimède :  $-\rho_l V g \vec{u}_x \vec{u}_x$

- la force de frottement :  $\vec{f} = -6\pi\eta R \dot{x} \vec{u}_x \quad \vec{f} = -6\pi\eta R \dot{x} \vec{u}_x$

A l'équilibre, on obtient  $\rho V g - k(x'_{eq} - x_0) - \rho_l V g = 0$

D'où  $\rho_l = \rho - (k/Vg)(x'_{eq} - x_0)$

4. Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide

4.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient l'équation différentielle :

$$\rho V \ddot{x} \quad \rho V \ddot{x} = (\rho - \rho_l) V g - k(x - x_0) - 6\pi\eta R \dot{x} = (\rho - \rho_l) V g - k(x - x_0) - 6\pi\eta R \dot{x}$$

D'où  $\rho V \ddot{x} \quad \rho V \ddot{x} = -k(x - x'_{eq}) - 6\pi\eta R \dot{x} = -k(x - x'_{eq}) - 6\pi\eta R \dot{x}$

4.2 L'équation caractéristique de l'équation homogène est :  $\rho V r^2 + 6\pi\eta R r + k = 0$   
 $\rho V r^2 + 6\pi\eta R r + k = 0$

Le mouvement est pseudopériodique si le discriminant est négatif donc

$$\Delta = (6\pi\eta R)^2 - 4k\rho V < 0 \text{ ou } k > k_0 = (6\pi\eta R)^2 / 4\rho V$$

La pseudopulsation est la partie imaginaire positive des solutions de l'équation caractéristique

$$\text{soit } \omega_2 = \sqrt{|\Delta|} / 2\rho V = \sqrt{(k - k_0) / \rho V} \quad \omega_2 = \sqrt{|\Delta|} / 2\rho V = \sqrt{(k - k_0) / \rho V}$$

#### 5. Coefficient de viscosité du liquide

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - k_0 / \rho V \quad \omega_2^2 = \omega_1^2 - k_0 / \rho V \text{ d'où } (6\pi\eta R)^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) (\omega_1^2 - \omega_2^2) 4(\rho V)^2$$

$$\text{On a donc : } \eta = (\rho V / 3\pi R) \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad \eta = (\rho V / 3\pi R) \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Troisième partie : Oscillations forcées

#### 6. Régime permanent

6.1 En passant en notation complexe :  $\underline{x} = \underline{X}e^{i\omega t}$  avec  $\underline{X} = A e^{i\phi}$ , on obtient :

$$(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2)\underline{X} = F_0/m \text{ d'où}$$

$$\underline{A} = F_0/m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}$$

$$6.2 \text{ De même } \sin \phi = \frac{-2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \quad \sin \phi = \frac{-2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

$$\text{et } \cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

#### 7. Puissance absorbée par l'oscillateur

$$7.1 \text{ On a } v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$P_e(t) = F.v = (F_0 \cos \omega t) (-A\omega \sin(\omega t + \phi) A\omega \sin(\omega t + \phi)) = (-A\omega F_0/2)(\sin(2\omega t + \phi) + \sin \phi)$$

$$\langle P_e \rangle = (-A\omega F_0/2)(\sin \phi)$$

$$\text{Soit en remplaçant : } \langle P_e \rangle = (F_0^2 \alpha / m) \cdot \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2] [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2]$$

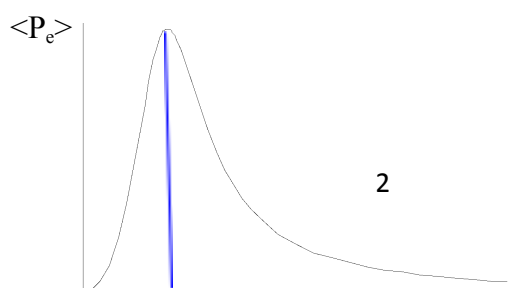
$$7.2 \text{ En divisant par } \omega^2 : \quad \langle P_e \rangle = (F_0^2 \alpha / m) \cdot 1 / [(\omega_0^2 / \omega - \omega)^2 + 4\alpha^2]$$

$$[(\omega_0^2 / \omega - \omega)^2 + 4\alpha^2]$$

$\langle P_e \rangle$  est maximale quand le dénominateur est minimal soit pour  $\omega = \omega_0$  et

$$\langle P_e \rangle_{\max} = F_0^2 / 4\alpha m.$$

Allure de la représentation graphique de  $\langle P_e \rangle$  en fonction de  $\omega$  :



$$\omega_0$$

$$\omega$$

$\omega_{\max}$  correspond au phénomène de résonance où la puissance absorbée par l'oscillateur est alors maximale.

*Quatrième partie : Petites oscillations d'un bouchon de liège*

8. A l'équilibre, le poids du bouchon est compensé par la poussée d'Archimède donc :

$$\rho V g = \rho_{\text{eau}} (V/2) g \quad \text{d'où} \quad \rho = \rho_{\text{eau}}/2$$

9.1 Si  $z \ll R$ ,  $V_i = V/2 - (2Rz)L = V/2 - az$  avec  $a = 2RL$

9.2 En appliquant la deuxième loi de Newton et en projetant sur Oz :

$$\rho V \ddot{z} = \rho_{\text{eau}} V_i g - \rho V g = \rho g (2V/2 - 2az - V)$$

$$\text{Soit } \ddot{z} = -(4RLg/V) z = -(4g/\pi R) z \quad \ddot{z} = -(4RLg/V) z = -(4g/\pi R) z$$

$$\text{D'où } \omega_0 = \sqrt{(4g/\pi R)} \quad \omega_0 = \sqrt{(4g/\pi R)}$$

9.3 La solution de l'équation différentielle est  $z(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

En utilisant les conditions initiales, on obtient  $z(t) = z_0 \cos \omega_0 t$

## DEUXIEME PROBLEME : UTILISATION DE SOLENOIDES

*Première partie : Champ magnétique créé par un tore*

### 1. Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égal au produit de  $\mu_0$  par la somme des intensités des courants enlacés par le contour  $\vec{I} \vec{I}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{I} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

S étant une surface quelconque s'appuyant sur C,  $d\vec{S}$  orienté de façon compatible avec l'orientation de C.

Ce théorème se déduit de l'équation de Maxwell Ampère dans l'approximation des régimes quasi-permanents :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$   $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

### 2. Symétries

$\vec{B}(M)$  est un pseudovecteur : il est perpendiculaire au plan de symétrie  $(M, \vec{e}_r)$  donc  $\vec{B}(M)$  est orthoradial. Il y a invariance de la distribution par rotation autour de Oz donc  $|\vec{B}(M)|$  ne dépend pas de  $\theta$ :  $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$   
 $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$

### 3. Expression du champ magnétique

On considère un cercle d'axe Oz, de rayon r, orienté selon  $\vec{e}_\theta$ , placé dans le plan z fixé.

D'après le théorème d'Ampère,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) 2\pi r = \mu_0 \vec{I} \vec{I}$

Pour  $|z| \gg r$  « ext » :  $\vec{I} \vec{I} = 0$  donc  $B(r, z) = 0$

Pour  $|z| \ll r$  « int » :

Si  $r < R_1$  :  $\vec{I} \vec{I} = 0$  donc  $B(r, z) = 0$

Si  $r > R_2$  :  $\vec{I} \vec{I} = NI - NI = 0$  donc  $B(r, z) = 0$

Si  $R_1 < r < R_2$  :  $\vec{I} \vec{I} = NI$  d'où  $\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta$

Donc  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$  et  $\vec{B}_{\text{int}} = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta$

### 4. Cas d'un solénoïde infini

Si le rayon tend vers l'infini, en notant  $l = 2\pi r$ , on a

$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$  et  $\vec{B}_{\text{int}} = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta = (\mu_0 n I) \vec{e}_\theta = (\mu_0 n I) \vec{e}_\theta$   
 avec  $n = N/l$ .

*Deuxième partie : Inductance d'un solénoïde*

### 5. Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant le flux propre

Pour une spire : l'orientation de la spire étant celle du courant, la normale à sa surface est

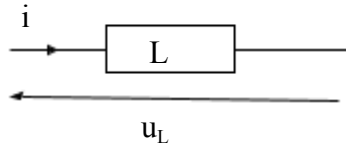
donc dans le même sens que  $\vec{B}$  d'où  $\Phi_0 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} B \cdot dS = (\mu_0 n I) S$

D'où  $\Phi_{\text{propre}} = N \Phi_0 = \mu_0 N^2 S I / l$ .

$$\phi_{propre} = L i \phi_{propre} = L i \quad \text{d'où } L = \mu_0 N^2 S / l$$

## 6. Détermination de l'inductance propre du solénoïde par l'énergie magnétique

6.1 En convention récepteur,  $u_L = L (di/dt)$



6.2  $P_{el}(t) = u_L(t) \cdot i(t) = d(1/2 Li^2)/dt = dE_L/dt$  d'où  $E_L = 1/2 Li^2$

6.3  $E_L = \iiint_V E_{m,vol} d\tau = \iiint_V (B^2/2\mu_0) d\tau = (B^2/2\mu_0)(S \cdot l) = \mu_0 N^2 S i^2 / 2l$

$$\iiint_V E_{m,vol} d\tau = \iiint_V (B^2/2\mu_0) d\tau = (B^2/2\mu_0)(S \cdot l) = \mu_0 N^2 S i^2 / 2l$$

D'où  $L = \mu_0 N^2 S / l$

*Troisième partie : régimes transitoires entre deux solénoïdes couplés*

## 7. Etablissement de courant dans le solénoïde

À  $t=0$ , on ferme l'interrupteur.

L'équation électrique s'écrit :  $E = Ri + L di/dt$

À  $t=0$ ,  $i = 0$  (continuité du courant dans la bobine) donc  $i(t) = (E/R)(1 - \exp(-tR/L))$

Quand  $t \rightarrow \infty \rightarrow \infty$ ,  $i = i_m = E/R$

## 8. Circuits couplés

8.1 Equations électriques :

(1)

$$E = Ri_1 + L di_1/dt + M di_2/dt$$

(2)  $0 = Ri_2 + L di_2/dt + M di_1/dt$

8.2 En ajoutant (1) et (2), on obtient l'équation différentielle vérifiée par  $I = i_1 + i_2$  :

$$E = R I + (L+M) dI/dt$$

En faisant (1) - (2), on obtient celle vérifiée par  $J = i_1 - i_2$  :

$$E = R J + (L-M) dJ/dt$$

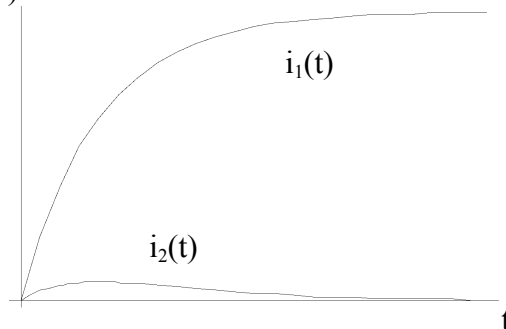
8.3 Par continuité dans les circuits contenant une bobine, à  $t = 0$ ,  $I = 0$  et  $J = 0$ .

D'où  $I(t) = (E/R)(1 - \exp(-t/\tau_1))$  et  $J(t) = (E/R)(1 - \exp(-t/\tau_2))$

$$i_1(t) = (I+J)/2 \text{ donc } i_1(t) = (E/R) (1 - (\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2))/2)$$

$$i_2(t) = (I-J)/2 \text{ donc } i_2(t) = (E/R) (-\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2))/2$$

Allure des courbes :  $i_1(t)$



*Quatrième partie : champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde*

## 9. Champ électrique à l'intérieur d'un solénoïde

9.1 Equation de Maxwell-Faraday :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial \vec{B} / \partial t \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial \vec{B} / \partial t$

Comme  $i$  dépend du temps, alors le champ magnétique dépend du temps donc il existe un champ électrique.

9.2 Comme le champ électrique est orthoradial et ne dépend que de  $r$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = -\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_z \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = -\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_z \quad \text{d'où}$$

$$\vec{E}(M) = \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta \quad \vec{E}(M) = \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta$$

## 10. Introduction d'un conducteur dans le solénoïde

### 10.1 Effet Joule dans le cylindre métallique

10.1.1 Loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \vec{j} = \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta$   
 $\gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta$

$$10.1.2 \quad dP_j = (\vec{j} \cdot \vec{E}) \, d\tau \quad (\vec{j} \cdot \vec{E}) \, d\tau$$

$$\text{donc} \quad dP_j = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2)] \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2)]^2 r \, dr \, d\theta \, dz = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t]$$

$$\gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t]^2 r^3 \, dr \, d\theta \, dz / 4$$

En intégrant, on obtient :

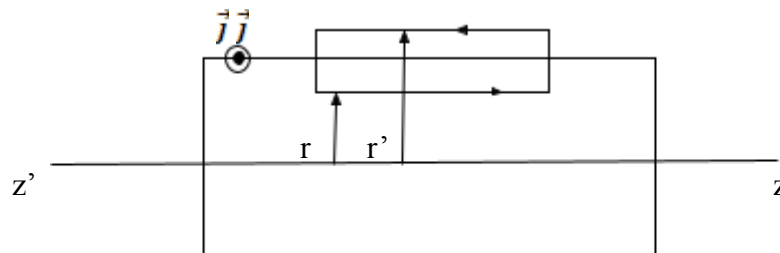
$$P_j = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t] \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t]^2 h \pi a^4 / 8 \quad \text{et} \quad \langle P_j \rangle = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega] \gamma [\mu_0 n I_0 \omega]^2 h$$

$$\pi a^4 / 16$$

### 10.1.3 Chauffage par induction

### 10.2 Influence du conducteur cylindrique sur le champ magnétique

10.2.1 On applique le théorème d'Ampère à un rectangle orienté de longueur  $H$ , de cotés distants de  $r < a$  et de  $r' > a$ .



$$\oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} \quad \oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = B'(r,t) H - B'(r',t) H = B'(r,t) H \quad (B' \text{ nul à l'extérieur})$$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} \quad \oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$= \mu_0 \iint_S \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \mu_0 \iint_S \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \, dr \, dz =$$

$$\gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t ( \gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t (a^2 - r^2) H / 4$$

$$\text{D'où} \quad B'(r,t) = \gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t ( \gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t (a^2 - r^2) / 4$$

10.2.2 Le rapport des amplitudes des champs est alors :

$$B'/B = \mu_0 \omega \gamma (a^2 - r^2) / 4$$

**10.2.3** Le rapport précédent est maximal en  $r=0$  donc  $B' \ll B$  si  $\mu_0 \omega \gamma a^2 \ll 1$