

Provo a dare una risposta, anche se temo non sia quella prevista (perché è un po' articolata per un problema di questo tipo). Forse esiste un metodo più semplice per ottenere il risultato. Non sono nemmeno del tutto sicuro che la mia soluzione sia corretta (quindi resto in attesa di osservazioni o conferme da altri solutori).

Mostro come sono giunto al valore che propongo come soluzione:

- il primo numero che richiede più di due cifre uguali è 111 (quindi è lì che le due strisce standard non bastano più)
- questo suggerisce che la prima cifra a esaurirsi è proprio "1"
- "1" è anche la prima cifra a presentarsi in forme "dense" (cioè in numeri composti da molti "1" come ...11111... e loro "intorni")
- tali sequenze tendono inoltre ad apparire dopo ogni potenza di 10
- la frequenza media delle cifre da 1 a 9 tende a essere uniforme (cioè su grandi intervalli di numeri si presentano uniformemente)
- "1" però appare in modo molto denso all'inizio delle potenze di 10
- dopo ogni potenza di 10 iniziano a comparire sequenze ricche di "1" (come 11011, 11111, ...; e pure dopo multipli di potenza: 21111, ...).

Questo uso concentrato fa sì che l'"1" si esaurisca prima degli altri.

Elenco gli "1" a disposizione e usati agli aeroplanini numerati 10^n :

- all'aeroplanino 10 a disposizione 20 "1" di cui utilizzati 2
- all'aeroplanino 100 a disposizione 200 "1" di cui utilizzati 21
- all'aeroplanino 1000 a disposizione 2000 "1" di cui utilizzati 301
- all'aeroplanino 10^n a disposizione $2 \cdot 10^n$ "1" di cui $n \cdot 10^{n-1} + 1$ usati.

All'aeroplanino 10^{20} gli "1" usati superano di una unità i disponibili.

Non sono stato in grado di procedere "matematicamente" alla soluzione.

Sono passato a una strategia per tentativi aiutato da un programma che (una verifica esaustiva su tutti i numeri richiederebbe troppo tempo):

- calcola quanti "1" erano stati usati fino a un certo numero fornito
- verifica quando il rapporto tra "1" usati e disponibili supera 1 (in quel caso gli "1" a disposizione non risultano sufficienti).

Il grafico di questo rapporto non cresce, però, in modo costante (ha picchi dopo potenze di 10, poi cali e un andamento oscillante).

Ho tracciato questo rapporto, con l'aiuto di un programma, fino a 10^{12} (anche qui andare oltre avrebbe richiesto tempi di calcolo eccessivi).

Il grafico che ne è risultato evidenzia un andamento interessante:

https://drive.google.com/file/d/1ia7m6HgDS5WzmgKy4TBGSMOzq5SCtbNL/view?usp=drive_link

- il picco di consumo si ha proprio subito dopo ogni potenza di 10
- tra un picco e l'altro ci sono tratti in cui il rapporto decresce
- il grafico mostra un andamento ricorrente a ogni potenza di 10
- tale andamento risulta, inoltre, traslato in alto a ogni potenza (mi è utile perché mi permette di procedendo a "ritroso" da 10^{20})
- devo solo individuare a quale potenza gli "1" non si esauriscono (da lì in poi non vi saranno più numeri che esauriscono gli "1").

Si nota che cresce a inizio delle potenze di 10 dove gli "1" sono densi.

Vi sono però anche altre zone più ristrette dove il rapporto decresce.

Il suo andamento di ripete pressappoco simile per ogni potenza di 10

(ad ogni nuova potenza l'andamento risulta traslato un po' più in alto).

Dato l'andamento sono stato capace di procedere solamente per tentativi (individuati valori che ritenevo da approfondire ho usato un programma):

- ho iniziato da numeri di 20 cifre, cioè da $10^{20}-1$, per poi decrescere (sapendo che a 10^{20} il rapporto è >1 vedo se lo è per valori inferiori)
- mi sono concentrato su numeri dove la "densità" di "1" è molto grande (dove, cioè, devono essere attinti molti "1" dalla riserva di strisce)
- dai possibili candidati alla risposta ne ho verificato i "dintorni" (per farlo mi sono servito di un programma che mi facesse i calcoli).

La mia risposta è 1'999'920'117'463'825; che un numero di 16 cifre).

(per 15 cifre in zona di picco il rapporto resta sempre inferiore a 1).

Detto ciò, la mia risposta è: 1'999'920'117'463'825, che ha 16 cifre

(per 15 cifre in zona di picco del grafico il rapporto è minore di 1):

- si sarebbero dovuti utilizzare in tutto 3'999'840'234'927'651 "1" (i disponibili sono $1'999'920'117'463'825 \cdot 2 = 3'999'840'234'927'650$)
- per i numeri precedenti gli "1" disponibili sono ancora sufficienti.

Ho tracciato il rapporto in due grafici con intervalli e passi diversi

(per accertarmi che non esistessero numeri precedenti con rapporto > 1):

https://drive.google.com/file/d/1Sfkjxgcsvlf6Q4ij7rdt5dP8mVFYa-tLD/view?usp=drive_link

(i due grafici, ovviamente, sono stati ottenuti con un programma).

Questo grafico mostra l'andamento del rapporto per "0", "1" e "2":

https://drive.google.com/file/d/1PXbPdbXOP4gDdhf_VgCp0epVciPRtx7S/view?usp=sharing

L'andamento dei grafici non è lineare ma ha una struttura "a scalini".

Tra due potenze consecutive di 10, il rapporto mostra 9 oscillazioni

(una per ogni incremento della cifra più significativa del numero N).

Ciascuno "scalino" consiste in una salita seguita poi da una discesa.

Lo "0" manca del primo perché non è, mai, il digit più significativo.

Un accenno su: scrivere in base Fibonacci
(ignorando il primo dei due "1" iniziali).

Il teorema di Zeckendorf afferma che:

- ogni intero positivo può essere rappresentato in modo univoco
(come somma di uno o più numeri di Fibonacci non consecutivi).

Usando tale rappresentazione al numero 1010 esauriscono gli "0".

Mostro con foglio Excel come procede l'utilizzo di "0" e "1":

https://docs.google.com/spreadsheets/d/18z63TcUN3SmQ3JMPfhB3a9_ac43iGLFm/edit?usp=sharing&ouid=117564311960738395185&rtpof=true&sd=true

Non vincolati da Zeckendorf la verifica diventa più complicata.

Ho tentato con una strategia greedy di ottenere più N possibili

(...in realtà "mi sono fatto aiutare" per non sbagliare i conti):

- per ogni N scelgo la rappresentazione che massimizza "1" o "0"
- intendo: massimizza il minimo tra "1" "0" nel pool disponibili
- dovrebbe tenere il loro numero bilanciato e più alto possibile.

Una verifica, ...non mia, mostra che "0" esauriscono sempre a 1010.

In base 2, invece, gli "1" si esauriscono al numero 11112 = 1510.