

CONCOURS INA 1996: Epreuve de physique**I) Stabilité, instabilité et métastabilité en mécanique** (durée: 30 mn)

I,1,a) * $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_q)$, le repère des coordonnées polaires planes.

$$O \rightarrow M = R_1 \vec{u}_r \Rightarrow \vec{V} = R_1 \frac{dq}{dt} \vec{u}_q$$

* Appliquons le théorème de l'énergie cinétique:

$$d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right) = m\vec{g} \cdot (R_1 d\vec{u}_q) = -mgR_1 \sin q dq$$

Soit, en intégrant:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR_1^2\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = mgR_1 \cos q + cte_1 \quad \hat{U}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{R_1} \cos q + cte_2 \quad \Rightarrow \dot{q}_0^2 = 2\frac{g}{R_1} + cte_2$$

$$\hat{U}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{R_1}(\cos q - 1) + \dot{q}_0^2$$

I,1,b) * En dérivant l'expression précédente par rapport à t, on obtient:

$$2\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2} = -2\frac{g}{R_1}\sin q \frac{dq}{dt} \hat{U} \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{g}{R_1}\sin q - \frac{g}{R_1}q$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{g}{R_1}} = 100 \text{rd} \cdot s^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = 6,28 \cdot 10^{-2} s$$

* En intégrant, on obtient:

$$q = A \cos wt + B \sin wt \Rightarrow \dot{q} = -A w \sin wt + B w \cos wt$$

En traduisant les conditions initiales, il vient: $0 = A$ et $\dot{q}_0 = Bw$, soit:

$$q = \frac{\dot{q}_0}{w} \sin wt \Rightarrow q_{MAX} = \frac{\dot{q}_0}{w} = 10^{-2} \text{rd}$$

* L'approximation $\sin \theta \approx \theta$ est justifiée car θ_{MAX} est très petit, bien inférieur à 30° .

I,1,c) * Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée: $r^2 + 2\lambda\omega r + \omega^2 =$

0 s'écrit $\lambda^2\omega^2 - \omega^2$, et s'annule pour $\lambda = 1$, ce qui correspond au régime critique.

* Dans ces conditions, la forme générale de la solution de l'équation est:

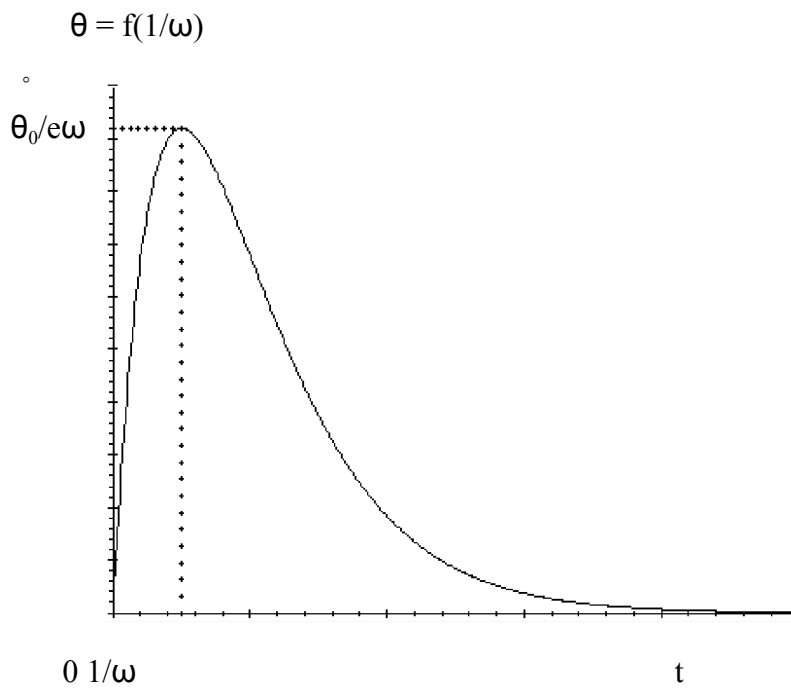
$$q = e^{-wt}(a + bt) \Rightarrow \dot{q} = e^{-wt}(-wa - wbt + b)$$

En traduisant les conditions initiales, il vient: $0 = a$ et $\dot{q}_0 = -wa + b$, donc:

$$q = \dot{q}_0 t e^{-wt} \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}_0 e^{-wt}(-wt + 1) = 0 \text{ pour } t = \frac{1}{w} \Rightarrow q_m = \frac{\dot{q}_0}{ew} = \frac{q_{MAX}}{e} < q_{MAX}$$

Les frottements impliquent une amplitude maximale plus faible.

Allure de la courbe $q = \dot{q}_0 t e^{-wt}$



I,2,a) $dE_p = - m\vec{g} \cdot (R d\vec{u}_q) = + mgR \sin q dq$
 $\Rightarrow E_p = - mgR \cos q + cte = - mgR(1 + \cos q)$ en traduisant $E_p = 0$ pour $\theta = \pi$.

$0 < \theta < \pi$	$E_p = - m g R_1 (1 + \cos \theta)$
$\pi < \theta < 2\pi$	$E_p = - m g R_2 (1 + \cos \theta)$

Allure de la courbe $E_p = f(\theta)$

$E_p = f(\theta)$

B: π

2π

θ

E: $-2mg R_1$

$- 2 mg R_2$

F

I,2,b) E et F sont stables, B est instable

I,2,c) * Appliquons le théorème de l'énergie cinétique:

$$d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right) = m\vec{g} \cdot \left(R_1 d\vec{q}_q\right) = -dE_p \Rightarrow \frac{1}{2}m\vec{V}_{E^2} - \frac{1}{2}m\vec{V}_{B^2} = E_{pB} - E_{pE} = 2mgR_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mV_{0^2} - \frac{1}{2}m\vec{V}_{B^2} = 2mgR_1.$$

Pour que l'anneau atteigne le point B, la plus petite valeur possible pour V_B est 0.

Donc, il faut:

$$V_0 > 2\sqrt{gR_1}$$

Une énergie cinétique suffisante permet de vaincre la barrière de potentiel.

Si la condition est satisfaite, l'anneau retombe alors en F. Si elle ne l'est pas, l'anneau retombe en E. Ceci implique que E est une position **METASTABLE**

II) Métastabilité en thermodynamique: La surfusion de l'eau (durée: 30 mn)

II,1) En dérivant la définition de G^* , on obtient: $dG^* = dU + p_0 dV - T_0 dS$. Or:

* D'après le premier principe de la thermodynamique, $dU = \delta Q + \delta W$, avec $\delta W = -p_0 dV$

* D'après le second principe de la thermodynamique, $dS \geq \delta Q/T_0$, l'égalité n'ayant lieu que pour une transformation réversible

En combinant avec ce qui précède, on obtient: $dG \leq 0$

II,2) En dérivant l'expression proposée pour G par rapport à r , on obtient:

$$dG = 4\pi r^2 dr (g_S - g_L) < 0 \text{ si } dr > 0.$$

Or le système évolue spontanément dans le sens d'une diminution de G , donc dans le sens d'une augmentation de r .

Dans l'état final, tout est solide.

II,3,a) En dérivant l'expression proposée pour G par rapport à r , on obtient:

$$dG = 4\pi r^2 dr (g_S - g_L) + 8\pi A r dr$$

$$= 4\pi r dr [(g_S - g_L) r + 2A]$$

$$> 0 \text{ pour } r < 2A/(g_L - g_S)$$

Si $R > 2A/(g_L - g_S)$, il existe un état métastable B pour lequel:

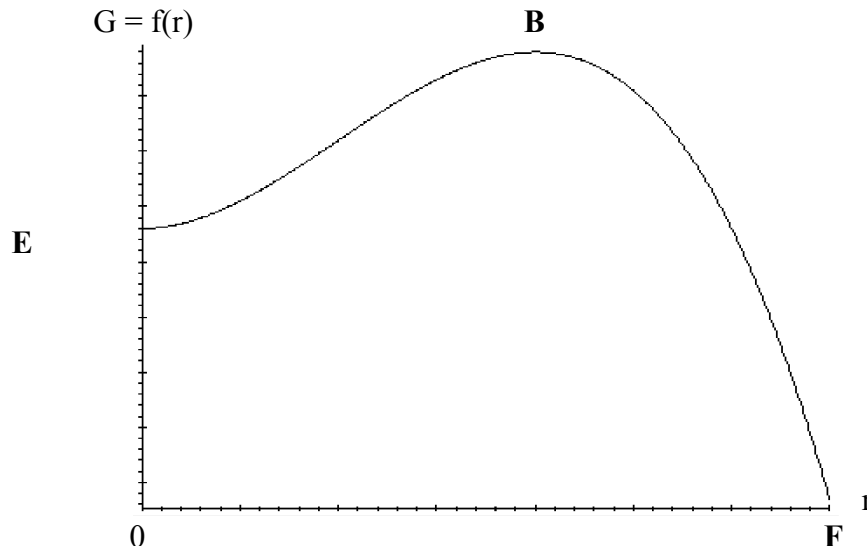
$r_B = \frac{2A}{g_L - g_S}$	$G_B = G_{max} = \frac{4p}{3} \left(g_L R^3 + 4 \frac{A^3}{(g_L - g_S)^2} \right)$
------------------------------	---

Les états (E, F) sont (stable, métastable) sans respect de l'ordre. L'état métastable correspond à la plus grande valeur de G:

$$G_E = 4 \pi g_L R^3 / 3 \text{ et } G_F = 4 \pi g_S R^3 / 3 + 4 \pi A R^2.$$

C_INA_2

Tracé de la courbe $G = f(r)$ dans la situation où E est métastable



II,3,b) * $\Delta g_a = G_B - G_E = 16 \pi A^3 / 3 (g_L - g_S)^2.$

* $\Delta g_a' = G_B - G_F = 16 \pi A^3 / 3 (g_L - g_S)^2 + 4 \pi R^3 (g_L - g_S) / 3 - 4 \pi A R^2.$

L'état E est métastable si $\Delta g_a < \Delta g_a'$, donc si $4 \pi R^3 (g_L - g_S) / 3 - 4 \pi A R^2 > 0$, donc si:

$$R > \frac{3A}{g_L - g_S}$$

II,4,a) **L'eau surfondue correspond à l'état métastable E.** Cet état existe si l'eau est très pure, sans germe de glace, pour une température faiblement inférieure à t_f .

II,4,b) **L'agitation permet d'obtenir l'énergie nécessaire au franchissement de la barrière de potentiel,** c'est-à-dire, au passage par l'état instable B pour évolution vers l'état stable F.

II,4,c) **Un exemple concret est la formation de verglas ou de grêle.**

Il existe deux situations pour lesquelles on peut obtenir du verglas:

* Le sol est gelé car il a fait froid longtemps. De l'air doux et humide arrive rapidement à basse altitude, s'élève et rencontre de l'air plus froid; il s'en suit une chute de pluie. L'eau liquide gèle par refroidissement sur le sol très froid.

Ceci ne correspond pas à la situation où existe de l'eau surfondue. Mais c'est le cas le plus fréquent de verglas.

* Trois couches d'air sont superposées:

- . une couche d'air froid, de température inférieure à 0 °C, qui stagne au sol.
- . une couche d'air froid en altitude.

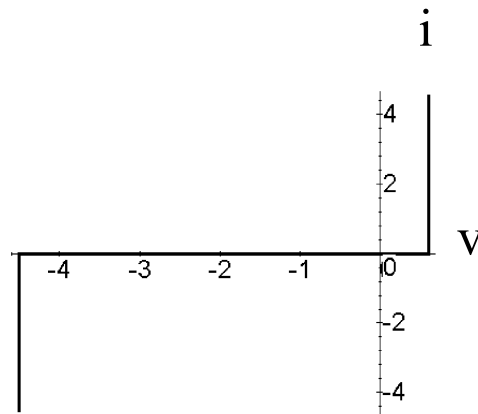
. entre les deux, une couche d'air doux et humide, qui s'élève et rencontre l'air plus froid de la couche supérieure; il s'en suit une chute de pluie. En traversant la couche la plus basse, l'eau liquide se refroidit à une température inférieure à 0 °C. On a donc de l'eau surfondue (état métastable).

En arrivant au sol, elle se transforme assez brutalement en glace (état stable) par choc. L'énergie apportée par le choc sert à franchir la barrière de potentiel.

Cette situation est rare, car s'il existe des noyaux de condensation (fumées ...), l'eau gèle en l'air, et on obtient de la grêle, ce qui est beaucoup plus courant.

III) Simulation de la métastabilité en électronique (durée: 15 mn + 30 mn)

III,1) La courbe de réponse de la diode est:



III,2) Mode X,Y, avec suppression de la base de temps.

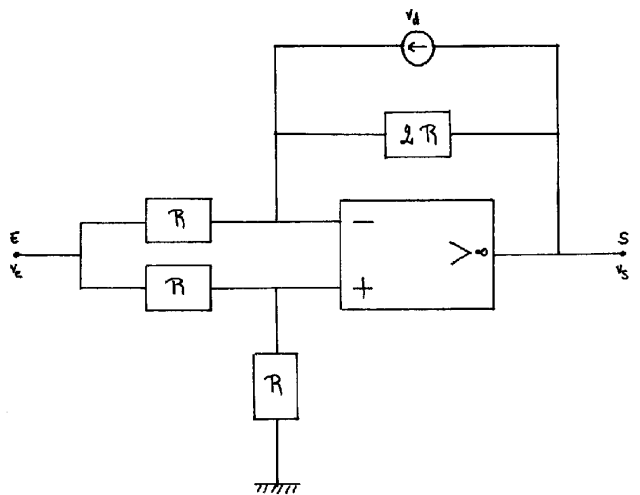
III,3) * Appliquons le théorème de Millmann à l'entrée +:

$$\frac{v_e}{R} + \frac{0}{R} = v_+ \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \hat{U} \quad v_+ = \frac{v_e}{2}$$

* Appliquons la loi aux noeuds à l'entrée -, qui est telle que $v_- = v_+ = v_e/2$ (A.O. parfait):

$$\frac{v_e - v_-}{R} = \frac{v}{2R} + i \hat{U} \quad i = \frac{v_e - v}{2R}$$

III,4)



$$v = v_d = v_+ - v_s \Rightarrow v_s = \frac{v_e}{2} - v_d \quad \text{et} \quad i = \frac{v_e - v_d}{2R}$$

On veut $i > 0$, donc $v_e > v_d$, ce qui correspond à la partie MN du graphe.

III,5) Appliquons le théorème de Millmann à l'entrée -, qui est telle que $v_- = v_+ = v_e/2$ (A.O. parfait):

$$\frac{v_e}{R} + \frac{v_s}{2R} = v_- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) = \frac{v_e}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) \hat{U} \quad v_s = -\frac{v_e}{2} \hat{U} g = \frac{1}{2}$$

$v = v_z - v_s$. Compte tenu de ce qui précède, $v = v_e$. Pour que la diode fonctionne comme prévu, avec $i = 0$, il faut donc que $-v_z < v = v_e < v_d$, ce qui correspond à la **partie QM du graphe**.

III,6,a)

Portions du graphe	Equations	Positions d'équilibre
MN	$v_s = \frac{1}{2} v_e - v_d$	$v_e = 2 v_d$
QM	$v_s = -\frac{1}{2} v_e$	$v_e = 0$
PQ	$v_s = \frac{1}{2} v_e + v_z$	$v_e = -2 v_z$

III,6,b)

Positions d'équilibre	Equations différentielles	Solutions
$v_e = 2 v_d$	$d^2 v_e / dt^2 = -\frac{1}{2} v_e + v_d$	$v_e = 2 v_d + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$
$v_e = 0$	$d^2 v_e / dt^2 = +\frac{1}{2} v_e$	$v_e = \epsilon/2\sqrt{2} e^{t/\sqrt{2}} + \epsilon/2\sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}}$
$v_e = -2 v_z$	$d^2 v_e / dt^2 = -\frac{1}{2} v_e - v_z$	$v_e = -2 v_z + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$

* Portion MN: La solution générale de l'équation différentielle est de la forme:

$$v_e = 2 v_d + A \cos t/\sqrt{2} + B \sin t/\sqrt{2} \Rightarrow dv_e/dt = -A/\sqrt{2} \sin t/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} \cos t/\sqrt{2}$$

* Portion QM: La solution générale de l'équation différentielle est de la forme:

$$v_e = A e^{t/\sqrt{2}} + B e^{-t/\sqrt{2}} \Rightarrow dv_e/dt = A/\sqrt{2} e^{t/\sqrt{2}} - B/\sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}}$$

* Portion MN: La solution générale de l'équation différentielle est de la forme:

$$v_e = -2 v_z + A \cos t/\sqrt{2} + B \sin t/\sqrt{2} \Rightarrow dv_e/dt = -A/\sqrt{2} \sin t/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} \cos t/\sqrt{2}$$

Si on suppose qu'à l'instant $t = 0$, on réalise $v_e = v_{e\text{éq}} + \epsilon$ et $dv_e/dt = 0$, on obtient les solutions indiquées dans la troisième colonne du tableau en traduisant ces conditions initiales.

La solution correspondant à la position d'équilibre $v_e = 0$ est instable, à cause du terme en $e^{t/\sqrt{2}}$ qui peut croître indéfiniment. Les autres positions sont stables, puisqu'elles correspondent à une situation d'oscillation.

R] Il est aussi possible de résoudre les équations différentielles en prenant comme conditions initiales $v_e = v_{e\text{éq}}$ et $dv_e/dt = \alpha$. Les solutions obtenues sont alors:

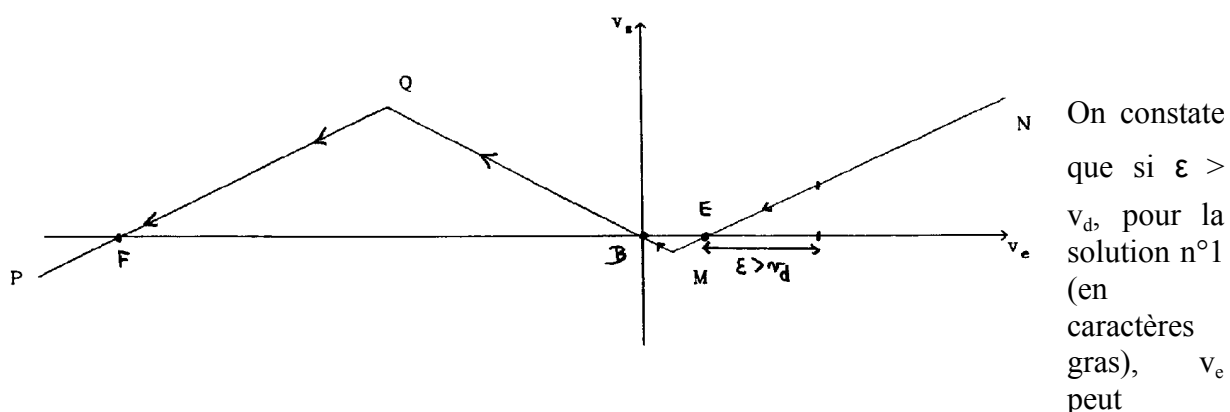
Positions d'équilibre	Equations différentielles	Solutions
$v_e = 2 v_d$	$d^2v_e/dt^2 = - \frac{1}{2} v_e + v_d$	$v_e = 2 v_d + \alpha \sin t/\sqrt{2}$
$v_e = 0$	$d^2v_e/dt^2 = + \frac{1}{2} v_e$	$v_e = \alpha/2\sqrt{2} e^{t/\sqrt{2}} - \alpha/2\sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}}$
$v_e = - 2 v_z$	$d^2v_e/dt^2 = - \frac{1}{2} v_e - v_z$	$v_e = - 2 v_z + \alpha \sin t/\sqrt{2}$

ce qui ne change rien aux conclusions.

Ces solutions sont sans intérêts pour la question suivante. Mais l'énoncé est peu clair sur la perturbation, et rien n'interdit de se lancer sur cette piste, et par conséquent, de perdre son temps !

III,6,c) Reprenons les solutions déterminées à l'aide des conditions initiales $v_e = v_{e\text{éq}} + \epsilon$ et $dv_e/dt = 0$, soit:

Positions d'équilibre	Equations différentielles	Solutions
$v_e = 2 v_d$	$d^2v_e/dt^2 = - \frac{1}{2} v_e + v_d$	$v_e = 2 v_d + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$
$v_e = 0$	$d^2v_e/dt^2 = + \frac{1}{2} v_e$	$v_e = \epsilon/2\sqrt{2} e^{t/\sqrt{2}} + \epsilon/2\sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}}$
$v_e = - 2 v_z$	$d^2v_e/dt^2 = - \frac{1}{2} v_e - v_z$	$v_e = - 2 v_z + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$



devenir $< v_d$ quand le cos devient égal à négatif, auquel cas on change de régime: On franchit M pour passer dans la situation n°2 instable, et finalement aboutir à la situation n°3. Donc,

Positions d'équilibre	Solutions des équations différentielles	Nature des positions d'équilibre pour une perturbation $\epsilon > v_d$
$v_e = 2 v_d$	$v_e = 2 v_d + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$	métastable
$v_e = 0$	$v_e = \epsilon/2\sqrt{2} e^{t/\sqrt{2}} + \epsilon/2\sqrt{2} e^{-t/\sqrt{2}}$	instable
$v_e = - 2 v_z$	$v_e = - 2 v_z + \epsilon \cos t/\sqrt{2}$	stable

