Chapitre B3
Fonctions

I. Définitions

Une **fonction** est une relation entre deux ensembles de nombres. Pour chaque nombre de l'ensemble de départ, on associe un **unique nombre** de l'ensemble d'arrivée. Il existe une infinité de fonctions : carrée, cosinus, exponentielle, … Dans la vie courante, on peut aussi en rencontrer : la fonction qui donne la taille en fonction de l'âge, … On peut même définir la fonction qui donne l'aire d'un disque en fonction de son rayon. Historiquement, c'est pour décrire la trajectoire de solides que les fonctions sont apparues.
Par exemple, on peut définir la fonction **double**. On note alors :

$$f : R \to R \qquad x \mapsto 2x$$

Ou encore $f(x) = 2x$

Remarque

$f(x)$ se lit « f de x ».
« $f : x \mapsto 2x$ » se lit « **la fonction f qui, à x, associe $2x$** »
La première notation n'est pas utilisée dans les calculs mais sert à définir une fonction.
R désigne l'ensemble des nombres réels.
A l'aide de cette fonction, on peut calculer l'**image** d'un nombre :
$f(2) = 2 \times 2 = 4$ (On a remplacé x par 2 dans la formule)
$f(-3) = 2 \times (-3) = -6$

…
4 est l'**image** de 2 par la fonction f.
-6 est **l'image** de -3 par la fonction f.
On dit aussi que 2 est l'**antécédent** de 4 par f.
De la même façon, -3 est l'**antécédent** de -6 par f.

Questions possibles

Quelle est l'image de 2 par f ?
Quel est l'antécédent de 4 par f ?
De quel nombre 2 est-il l'antécédent par f ?
De quel nombre 4 est-il l'image par f ?

Exemple type brevet

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{x+1}{8}$.

1. *Le nombre $\frac{1}{2}$ est-il l'image de 3 par f ?*

2. *Calcule l'image de -3 par f. Donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.*

3. *Calcule l'antécédent de 0 par f.*

Solution

1. $f(3) = \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ *est l'image de 3 par f.*

2. $f(-3) = \frac{-3+1}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

3. ***Soit x l'antécédent de 0 par f.***

$f(x) = \frac{x+1}{8} = 0$

Cela se produit si $x + 1 = 0$ c'est-à-dire si $x = -1$.
-1 est l'antécédent de 0 par f.

Remarque

Un nombre ne possède au plus **qu'une seule image** par une fonction mais peut posséder plusieurs antécédents par cette fonction.

Exemples

• La **fonction carrée** f est définie sur R par $f(x) = x^2$.
Le nombre -3 possède une seule image 9 par f. En effet,

$$f(-3) = (-3)^2 = (-3)\times(-3) = 9$$

Le nombre 3 possède une seule image 9 par f. En effet,

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Par contre 9 possède 2 antécédents par f, -3 et 3.

• La **fonction constante** g est définie sur R par $g(x) = 5$.
Le nombre -3 possède une seule image 5 par g. En effet,

$$g(-3) = 5$$

Par contre, 5 possède une infinité d'antécédents par g. Tous les nombres réels sont des antécédents de 5 par g.

Question

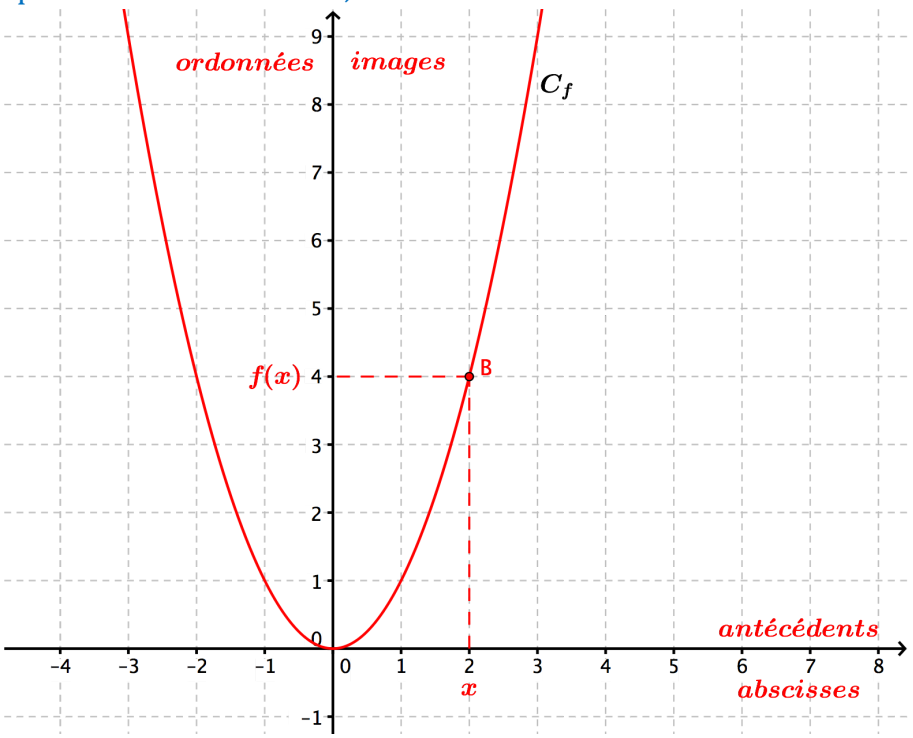
Existe-t-il des nombres qui ne possèdent pas d'antécédents par f ? par g ?

Solution

-4 n'a pas d'antécédent par f car le carré d'aucun nombre ne peut être négatif.
2 n'a pas d'antécédent par g car la seule image possible par g est 5.

II. Représentation graphique

Dans un repère, la **courbe représentative** d'une fonction f, notée C_f, est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$.
Les **antécédents** sont donc placés en **abscisse** et les **images** en **ordonnée**.
Si on reprend l'exemple de la fonction carrée, on obtient la courbe suivante :



Si l'on prend l'exemple du point B de coordonnées (2;4), on a bien $f(2) = 2^2 = 4$.
Pour tracer une telle courbe, on peut s'aider d'un **tableau de valeurs** :

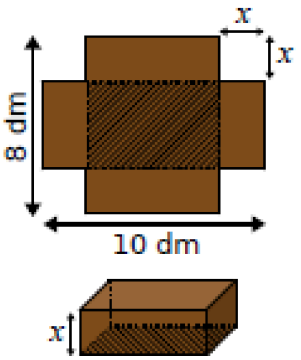
x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Remarque

À l'aide de la calculatrice, on peut calculer ces valeurs. On utilise la fonction « f(x) » (TI) ou « table » (Casio) de la calculatrice.

Exercice type brevet

Avec une plaque de carton rectangulaire de 8 dm par 10 dm, en découpant quatre carrés identiques, on obtient le patron d'une boîte (sans couvercle !). On veut trouver la dimension des carrés à découper pour obtenir une boîte dont le volume sera maximum.



On appelle x la longueur du côté des carrés en décimètres.

1. *Quelle est la plus grande valeur possible de x ? Le volume de la boîte est-il maximum pour cette valeur ?*

2. *Exprime en fonction de x la surface du « fond » de la boîte (partie hachurée) puis déduis-en l'expression du volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.*

3. *En utilisant un tableau de valeurs, trace la courbe représentative de V dans un repère. Pour quelle valeur de x le volume de la boîte semble-t-il maximal ?*

Solution

1. *La plus grande valeur de x est 4 dm. Pour cette valeur, le volume de la boîte est nul, ce n'est donc pas la valeur maximale.*

2. *La surface du fond de la boîte vaut :*

$$A = \underbrace{(10 - 2x)}_{longueur}\underbrace{(8 - 2x)}_{largeur}$$

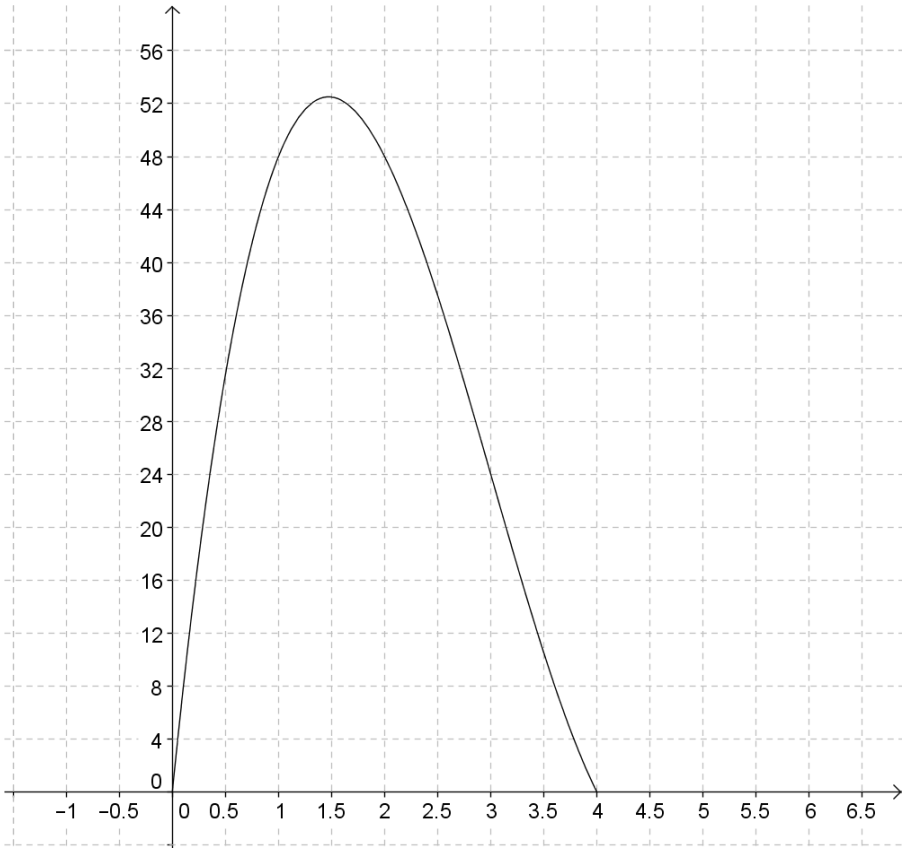
Le volume de la boîte vaut donc :

$$V(x) = x \times A = x(10 - 2x)(8 - 2x)$$

3. *On utilise un tableau de valeurs :*

x	***0***	***0,5***	***1***	***1 ,5***	***2***	***2,5***	***3***	***3,5***	***4***
$V(x)$	*0*	*31,5*	*48*	*52,5*	*48*	*37,5*	*24*	*10,5*	*0*

On trace alors la courbe représentative de V :



Le volume semble maximal si $x = 1,5$.

III. Calcul d'antécédents

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{8}$.

1. *Quel est l'antécédent de 0 par f ?*
2. *Quel est l'antécédent de 1 par f ?*
3. *Quel est l'antécédent de -1 par f ?*

Solution

1. *Soit x l'antécédent de 0 par f.*

$f(x) = 0 \frac{3x+2}{8} = 0$ *Une fraction égale* 0 *si son numérateur égale* $03x + 2 - 2 = 0 - 2 \frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} x =$

$-\frac{2}{3}$ est l'antécédent de 0 par f.

2. *Soit x l'antécédent de 1 par f.*

$f(x) = 1 \frac{3x+2}{8} = 1$ *Une fraction égale* 1 *si son numérateur égale son dénominateur*$3x + 2 - 2 =$

2 est l'antécédent de 1 par f.

3. *Soit x l'antécédent de* -1 *par f.*

$f(x) = -1 \frac{3x+2}{8} = -1$ *Une fraction égale* -1 *si son numérateur est l'opposé de son dénominateur*$3x$

$-\frac{10}{3}$ est l'antécédent de -1 *par f.*

IV. Fonctions linéaires et affines

Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des **constantes**. Le nombre a est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la fonction. Le nombre b est **l'ordonnée à l'origine** de la fonction.

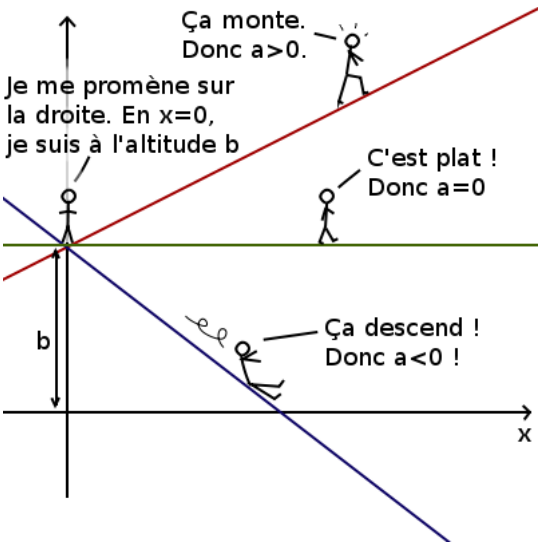
Si $a = 0$, la fonction est **constante**. Cette fonction prend toujours la même valeur.

Si $b = 0$, la fonction est **linéaire**. Une fonction linéaire représente **une situation de proportionnalité**.

Toute fonction affine est représentée par une **droite**.

Remarque : si a>0, la pente de la droite est positive et la fonction est **croissante** (« la droite monte »).

Si a<0, la pente de la droite est négative et la fonction est **décroissante** (« la droite descend »).



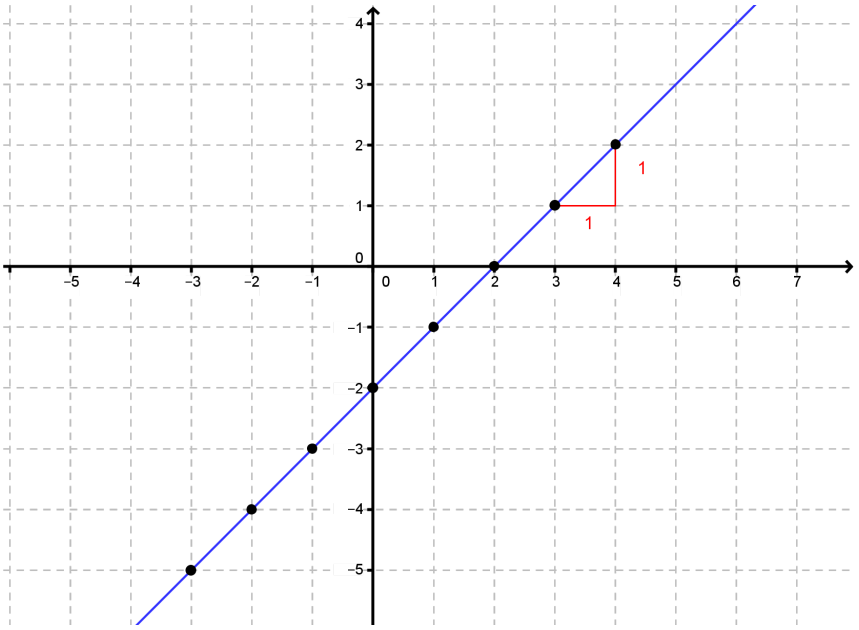
Représentation graphique

On veut tracer la fonction f définie par

$$f(x) = x - 2$$

On utilise le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1



Fonctions linéaires

Une fonction linéaire est associée à une situation de proportionnalité. La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

Par exemple, on regarde le prix d'un objet avec et sans la TVA (Taxe sur la Valeur Ajoutée). Si la TVA est de 20%, le prix HT (Hors taxe) doit être multiplié par 1,2 pour trouver le prix TTC (Toutes Taxes Comprises) :

$$\frac{100}{100} + \frac{20}{100} = \frac{120}{100} = 1,2$$

On peut résumer cette situation au tableau de proportionnalité suivant :

PHT	1€	5€	10€	16€	200€	226€	0€
PTTC	1,20€	6€	12€	19,20€	240€	271,20€	0€

Cette situation de proportionnalité peut être représentée dans un repère. Elle correspond à la courbe représentative de la fonction linéaire f définie par $f(x) = 1,2x$. Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient directeur de la fonction linéaire associée.

Exemples

- Augmenter de 3% correspond à la fonction linéaire $f(x) = 1,03x$.
- Diminuer de 10% correspond à la fonction linéaire $f(x) = 0,9x$.
- Augmenter de 200% correspond à la fonction linéaire $f(x) = 3x$.
- Diminuer de 50% correspond à la fonction linéaire $f(x) = 0,5x$.
- Diminuer de 27% correspond à la fonction linéaire $f(x) = 0,73x$.

Exercices type brevet

1. *Trouve la fonction linéaire f dont la courbe passe par le point A(5 ;3).*

Solution

$f(5) = 3$. f est de la forme $f(x) = ax$.

Donc $f(5) = a \times 5 = 3$ donc $a = \frac{3}{5} = 0,6$.

La fonction f est définie par $f(x) = 0,6x$.

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = -0,8x$. *Quelle est l'image de* $\frac{3}{4}$ *par f ?*

Solution

$f\left(\frac{3}{4}\right) = -0,8 \times \frac{3}{4} = -\frac{0,8\times3}{4} = -0,6$

L'image de $\frac{3}{4}$ par f est -0,6.

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = 1,5x$. *Quel est l'antécédent de 6 par f ?*

Solution

Soit x l'antécédent de 6 par f.

$f(x) = 1,5x = 6$

Donc $x = \frac{6}{1,5} = 4$

4 est l'antécédent de 6 par f.

Fonctions affines

Exercices type brevet

1. *Trouve la fonction affine f telle que 3 est l'image de 5 par f et dont le coefficient directeur est 2.*

Solution

f est de la forme $f(x) = ax + b$ *où* $a = 2$.

Donc $f(x) = 2x + b$.

Or, $f(5) = 3 = 2 \times 5 + b$

Donc $10 + b = 3$

$b = 3 - 10 = -7$

On en déduit que $f(x) = 2x - 7$

2. *Trouve la fonction affine f telle que 4 est l'image de 2 par f et dont l'ordonnée à l'origine vaut 3.*

Solution

f est de la forme $f(x) = ax + b$ *où* $b = 3$.

Donc $f(x) = ax + 3$

$Or, f(2) = 4 = a \times 2 + 3$
$Donc\ 2a + 3 = 4$
$2a = 1$

$a = 0,5$

On en déduit que $f(x) = 0,5x + 3$