Interrogation 9

Nom, Prénom et classe

Sujet A
I. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = 3y + 4,5$$

Vérifiant

$$y(0) = 3$$

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur R par

$$\forall x \in R, y(x) = Ce^{3x} - \frac{4,5}{3} = Ce^{3x} - 1,5$$

Or,

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow C - 1,5 = 3 \Leftrightarrow C = 4,5$$

Donc

$$\forall x \in R, y(x) = 4,5e^{3x} - 1,5$$

II. À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est de 18/37. On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. *Quelle loi suit X ? Justifier.*

L'expérience aléatoire s'apparente à une succession de 20 épreuves indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre 18/37 donc X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 18/37

$$X \sim B(20; 18/37)$$

2. *Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 9)$ et $P(X = 20)$? Justifier et interpréter dans le contexte de l'exercice.*

$$P(X = 0) = (20\ 0\ ) \times \left(\frac{18}{37}\right)^0 \times \left(\frac{19}{37}\right)^{20} = \left(\frac{19}{37}\right)^{20} \approx 1,6 \times 10^{-6}$$

La probabilité de ne gagner aucune partie est proche de 0.

$$P(X = 9) = (20\ 9\ ) \times \left(\frac{18}{37}\right)^9 \times \left(\frac{19}{37}\right)^{11} \approx 0,167847$$

La probabilité de gagner 9 parties est proche de 0,17.

$$P(X = 20) = (20\ 20\ ) \times \left(\frac{18}{37}\right)^{20} \times \left(\frac{19}{37}\right)^0 = \left(\frac{18}{37}\right)^{20} \approx 5,5 \times 10^{-7}$$

La probabilité de gagner toutes les parties est proche de 0.

Calculer la probabilité de gagner au moins 10 parties puis l'espérance $E(X)$ et l'interpréter.

D'après la calculatrice,

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,5399405$$

La probabilité de gagner au moins la moitié des parties est proche de 0,54.

$$E(X) = 20 \times \frac{18}{37} = \frac{360}{37} \approx 9,7$$

On peut espérer gagner 9,7 parties en moyenne.

Interrogation 9

Nom, Prénom et classe

Sujet B

I. On considère l'équation différentielle

$$2y' - 3y = e^{x}\ (E)$$

Montrer que la fonction f définie sur R par $f(x) = -e^{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) puis trouver une solution générale de l'équation différentielle.

f est dérivable sur R donc

$$\forall x \in R, f'(x) = -e^{x}$$

Ainsi,

$$\forall x \in R, 2f'(x) - 3f(x) = -2e^{x} + 3e^{x} = e^{x}$$

Donc f est bien une solution particulière de l'équation (E).
Remarquons que

$$(E) \Leftrightarrow y' = 1,5y + \frac{1}{2}e^{x}$$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur R par

$$\forall x \in R, y(x) = Ce^{1,5x} - e^{x}$$

II. En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2%. Dans un train dont les 1250 places ont été réservées, on appelle Y la variable qui compte le nombre de personnes en fauteuil roulant.

1. *Quelle loi suit Y ? Justifier.*

L'expérience aléatoire s'apparente à une succession de 1250 épreuves indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $0,02$ donc Y suit une loi binomiale de paramètres 1250 et $0,02$

$$Y \sim B(1250; 0,02)$$

2. *Calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 25)$? Justifier et interpréter dans le contexte de l'exercice.*

$$P(Y = 0) = \binom{1250}{0} \times 0,02^{0} \times 0,98^{1250} = 0,98^{1250} \approx 1,08 \times 10^{-11}$$

La probabilité de ne compter aucune personne en fauteuil roulant est proche de 0.

$$P(Y = 25) = \binom{1250}{25} \times 0,02^{25} \times 0,98^{1225} \approx 0,0803302$$

La probabilité de compter 25 personnes en fauteuil roulant est proche de 0,08.

3. *Le train dispose de 30 places pour les personnes en fauteuil roulant. Calculer la probabilité que le train ne puisse pas accueillir toutes les personnes en fauteuil roulant puis l'espérance $E(Y)$ et l'interpréter.*

D'après la calculatrice,

$$P(Y \geq 31) = 1 - P(Y \leq 30) \approx 0,1343949$$

La probabilité que le train ne puisse pas accueillir toutes les personnes en fauteuil roulant est proche de 0,13.

$$E(Y) = 1250 \times 0,02 = 25$$

On peut espérer accueillir 25 personnes en fauteuil roulant en moyenne.