

Δύο αστροναύτες

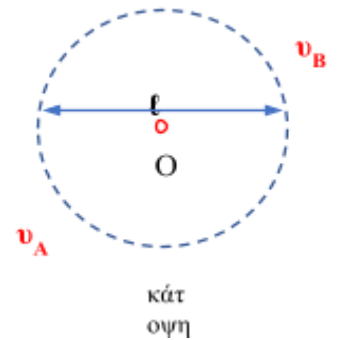
Δύο αστροναύτες A και B, ο καθένας μάζας $M=60\text{kg}$, συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές τεντωμένο σχοινί μήκους $\ell=10\text{m}$ και αμελητέας μάζας. Οι αστροναύτες βρίσκονται στο διάστημα, μακριά από άλλα ουράνια σώματα, και περιστρέφονται γύρω από το μέσο O του σχοινιού με ταχύτητες του ίδιου μέτρου $v=2\text{m/s}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i) Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος ως προς το σημείο O, θεωρώντας τους αστροναύτες ως υλικά σημεία.

ii) Οι αστροναύτες αρχίζουν και τραβούν σχοινί προς το μέρος τους και ελαττώνουν τη μεταξύ τους. Να εξηγήσετε γιατί οι αστροναύτες θα συνεχίσουν να στρέφονται γύρω από το κέντρο O.

iii) Αν το σχοινί κόβεται, όταν η τάση του ξεπερνάει την τιμή $T_{\text{max}}=750\text{N}$, ποια είναι η ελάχιστη απόσταση L_{min} των αστροναυτών, ώστε το σχοινί να μην κοπεί;

iv) Να γίνει το διάγραμμα της στροφορμής και της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση R από το κέντρο O.



Να θεωρηθεί ότι η μετακίνηση των αστροναυτών γίνεται πολύ αργά ώστε να αποκαθίσταται σχεδόν αμέσως κυκλική τροχιά.

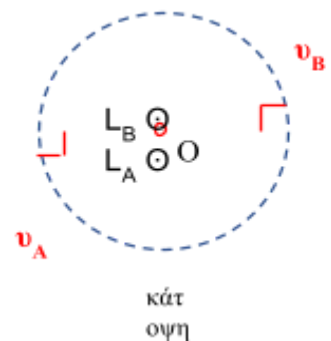
Απάντηση

i) Με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού η στροφορμή του κάθε αστροναύτη έχει τη φορά του διπλανού σχήματος και το μέτρο της στροφορμής του ίσο με:

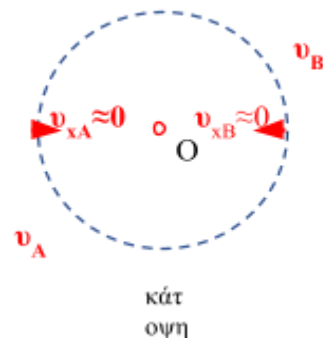
$$L_{(O)} = 2 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Η συνολική στροφορμή

$$L_{\Sigma\text{ΥΣ},(O)} = L_A + L_B \xrightarrow{(+)} L_{\Sigma\text{ΥΣ},(O)} = 1200 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$



ii) Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται στο μέσο O της μεταξύ τους απόστασης γιατί οι αστροναύτες έχουν ίδιες μάζες. Επειδή το νήμα είναι αβαρές οι τάσεις είναι ίσες και λόγω της ισότητας των μαζών, οι αστροναύτες θα έχουν κάθε στιγμή το ίδιο μέτρο επιτάχυνσης ταχύτητας και μετατόπισης με αποτέλεσμα και τα έργα τους να είναι ίσα. (Στην διάρκεια μείωσης της τροχιάς του κάθε αστροναύτη, η τάση του νήματος δεν είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, με αποτέλεσμα το έργο της τάσης να μην είναι μηδενικό και ο κάθε αστροναύτης να αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του.)



Επιπλέον το σύστημα των δύο αστροναυτών είναι μονωμένο καθώς δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις. Η ορμή του συστήματος είναι μηδέν. Η αρχή διατήρησης της ορμής κατά μήκος της ευθείας που περνά από το σχοινί επιβάλλει κάθε στιγμή οι αστροναύτες να έχουν αντίθετες ταχύτητες καθώς πλησιάζουν μεταξύ τους, ενώ θα μπορούσαμε να τις θεωρήσουμε και μηδενικές καθώς πλησιάζουν πολύ αργά. Έτσι προκύπτει ότι και τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων θα είναι ίσα. Η τάση έχει ρόλο κεντρομόλου και προκύπτει ότι θα έχουν και ίδια ακτίνα τροχιάς και η περιστροφή θα συνεχίσει να γίνεται περί το σημείο O.

$$T_1 = T_2 \rightarrow M \frac{v_A^2}{R_1} = M \frac{v_B^2}{R_2} \rightarrow R_1 = R_2$$

iii)

Από την διατήρηση της στροφορμής περί το σημείο O προκύπτει:

$$\overset{\boxtimes}{L}_{αρχ} = \overset{\boxtimes}{L}_{τελ} \quad (+)\overset{\boxtimes}{\rightarrow}$$

$$1200 = 2 \cdot M \cdot v \cdot R \rightarrow 10 = v \cdot R \rightarrow v = 10/R \quad (1)$$

$$\overset{\boxtimes}{\Sigma F}_κ = M \overset{\boxtimes}{a}_κ \Rightarrow T = \frac{M v^2}{R} \xrightarrow{(1)} T = \frac{6000}{R^3} \quad (2)$$

$$750 = \frac{6000}{R^3} \Rightarrow R^3 = \frac{600}{75} = 8 \Rightarrow R = \sqrt[3]{8} \Rightarrow R = 2m$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

iv) Η στροφορμή του συστήματος είναι κάθε στιγμή ίση με $L_{\Sigma Y \Sigma, (O)} = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ και επειδή οι αστροναύτες έχουν ίδια μάζα και ταχύτητα έχουν κάθε στιγμή ίδια στροφορμή με τιμή $L = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

$$L = m v R \xrightarrow{(1)} L = 10m = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει για $R = 5m \rightarrow T = 48N$, και για $R = 2m \rightarrow T = 750N$

$L(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$

600

0 2

5

R(
m)

2