Тема уроку. Розв’язування задач і вправ

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_2^2 x - 3log_2 x = 4$.

Розв'язання

Позначимо $log_2 x$ через y. Дане рівняння набере вигляду:

$y^2 - 3y = 4$; $y^2 - 3y - 4 = 0$; $y_1 = 4$; $y_2 = -1$.

Звідси $log_2 x = 4$, $log_2 x = -1$;

$x = 2^4$; $x = 2^{-1}$;

$x = 16$, $x = \frac{1}{2}$.

Перевірка: 1) $log_2^2 16 - 3\, log_2 16 = 16 - 12 = 4$;

2) $log_2^2 \frac{1}{2} - 3\, log_2 \frac{1}{2} = -1 + 3 = 4$.

Відповідь: 16; $\frac{1}{2}$.

2. Метод потенціювання

Приклад. Розв'яжіть рівняння $log_5(x - 1) + log_5(x - 2) = log_5(x + 2)$.

Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$log_5((x - 1)(x - 2)) = log_5(x + 2)$; $(x - 1)(x - 2) = x + 2$; $x^2 - 2x - x + 2 = x + 2$;

$x^2 - 4x = 0$; $x(x - 4) = 0$; $x = 0$ або $x = 4$.

Перевірка:

1) Значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $log_5(x - 1)$ і $log_5(x - 2)$ не мають смислу при $x = 0$.
2) $log_5(x-1) + log_5(x-2) = log_5(4-1) + log_5(4-2) = log_5 3 + log_5 2 = log_5(2\cdot 3) = log_5 6$.
   $log_5(x + 2) = log_5(4 + 2) = log_5 6$.

Отже, $x = 4$ — корінь.

Відповідь: 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3$.

Розв'язання

$$\log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3; \qquad \log_3 x - 2 \cdot {}^{\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}}} = 3;$$

$$\log_3 x - 2 \cdot {}^{\frac{\log_3 x}{-1}} = 3; \qquad \log_3 x + 2\log_3 x = 3;$$

$$3\log_3 x = 3; \qquad \log_3 x = 1; \qquad x = 3.$$

Перевірка: $\log_3 3 - 2^{\log_{\frac{1}{3}} 3} = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо:

$$\lg x^{\lg x} = \lg(100x); \qquad \lg x \lg x = \lg 100 + \lg x; \qquad \lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Замінимо $\lg x = y$. Рівняння прийме вигляд: $y^2 - y - 2 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

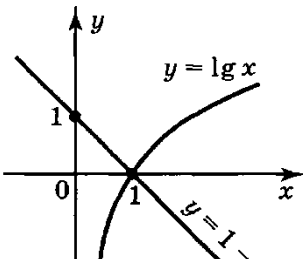
Тоді: 1) $\lg x = 2$; $x = 10^2$; $x = 100$. 2) $\lg x = -1$; $x = 10^{-1}$; $x = 0{,}1$.

Перевірка: 1) $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2$; $100x = 100 \cdot 100 = 100^2$.

Отже, $x = 100$ — корінь.

2) $x^{\lg x} = 0{,}1^{\lg 0{,}1} = 0{,}1^{-1} = {}^{\frac{1}{0{,}1}} = 10$; $100x = 100 \cdot 0{,}1 = 10$.

Отже, $x = 0{,}1$ — корінь.



Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь

Приклад. Розв'яжіть рівняння $lg\ x = 1 - x$ графічно.

Розв'язання

В одній і тій самій системі координат будуємо графіки функції $y = lg\ x$ і $y = 1 - x$ (рис. 165). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, $x = 1$ — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.

<u>Вправи:</u>

Найпростіші логарифмічні рівняння.

$\log_{0,5}(x^2+3x+10)=-3;$
ОДЗ: $x^2+3x+10>0;$
$x^2+3x+10=0;$
D=-31, то $x^2+3x+10>0$ для будь-якого x.
$x^2+3x+10=0,5^{-3};$
$x^2+3x+10=(\frac{1}{2})^{-3};$
$x^2+3x+10=8;$
$x^2+3x+2=0;$
$x_1=-1;\ x_2=-2.$
Відповідь: -2; -1.

Рівняння, що розв’язуються за допомогою використання властивостей логарифмів та способу потенціювання.

$\log_2(x-1)+\log_2(3x-2)=2;$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0; \\ 3x-2>0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>1; \\ x>\frac{2}{3}; \end{cases}$

x є $(1;+\infty)$

Використовуючи властивість суми логарифмів маємо:

$(x-1)(3x-2)=4;$
$3x^2-5x+2=4;$

$3x^2-5x-2=0$;
D=49.
$x_1=2$; $x_2=-\frac{1}{3}$.
Відповідь: 2.

Рівняння, що розв'язуються методом заміни змінної.

$$2\log_3{}^2 x+3\log_3\frac{1}{x}-2=0.$$

ОДЗ: x>0.
Використовуючи властивість логарифма степеня маємо:
$2\log_3{}^2x-3\log_3x$ x $-2=0$;
Скористаємося заміною.
Нехай $\log_3x=t$, тоді маємо рівняння:
$2t^2-3t-2=0$;
D=25;
$t_1=2$; $t_2=-0,5$.
$\log_3$ x x $=2$; x=9;
$\log_3$ x x $=-0,5$;
$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Відповідь: 9; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рівняння, в якому використовується формула переходу до нової основи логарифма.

$3\log_3(4x-1)+\log_{4x-1}3=4$;

ОДЗ: $\begin{cases}4x-1>0;\\4x-1\neq 1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x>\frac{1}{4};\\x\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Нехай $\log_3(4x-1)=t$;

$3t+\frac{1}{t}-4=0$

$3t^2-4t+1=0$;

$D=4$;

$t_1=1$; $t_2=\frac{1}{3}$.

1). $\log_3(4x-1)=1$;

$x_1=1$.

2). $\log_3(4x-1)=\frac{1}{3}$;

$x_2=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$.

Домашнє завдання:

Пройти онлайн-тест за посиланням:

https://naurok.com.ua/test/join?gamecode=4660807