

Тема уроку. Розв'язування задач і вправ

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log^2 x - 3\log_2 x = 4$.

Розв'язання

Позначимо $\log_2 x$ через y . Дане рівняння набере вигляду:

$$y^2 - 3y = 4; \quad y^2 - 3y - 4 = 0; \quad y_1 = 4; y_2 = -1.$$

Звідси $\log_2 x = 4$, $\log_2 x = -1$;

$$x = 2^4; \quad x = 2^{-1};$$

$$x = 16, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Перевірка: 1) $\log^2 16 - 3 \log_2 16 = 16 - 12 = 4$;

$$2) \log^2 \frac{1}{2} - 3 \log_2 \frac{1}{2} = -1 + 3 = 4.$$

Відповідь: 16; $\frac{1}{2}$.

2. Метод потенціювання

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(x+2)$.

Розв'язання

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$$\log_5((x-1)(x-2)) = \log_5(x+2); \quad (x-1)(x-2) = x+2; \quad x^2 - 2x - x + 2 = x + 2;$$

$$x^2 - 4x = 0; \quad x(x-4) = 0; \quad x = 0 \text{ або } x = 4.$$

Перевірка:

1) Значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $\log_5(x-1)$ і $\log_5(x-2)$ не мають смислу при $x = 0$.

2) $\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(4-1) + \log_5(4-2) = \log_5 3 + \log_5 2 = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5 6$.
 $\log_5(x+2) = \log_5(4+2) = \log_5 6$.

Отже, $x = 4$ — корінь.

Відповідь: 4.

3. Метод зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3$.

Розв'язання

$$\log_3 x - 2^{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3; \quad \log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3;$$

$$\log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3; \quad \log_3 x + 2\log_3 x = 3;$$

$$3\log_3 x = 3; \quad \log_3 x = 1; \quad x = 3.$$

Перевірка: $\log_3 3 - 2^{\log_{\frac{1}{3}} 3} = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.

4. Метод логарифмування

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

Розв'язання

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо:

$$\lg x^{\lg x} = \lg(100x); \quad \lg x \lg x = \lg 100 + \lg x; \quad \lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Замінімо $\lg x = y$. Рівняння прийме вигляд: $y^2 - y - 2 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

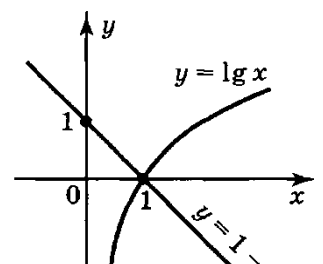
Тоді: 1) $\lg x = 2$; $x = 10^2$; $x = 100$. 2) $\lg x = -1$; $x = 10^{-1}$; $x = 0,1$.

Перевірка: 1) $x^{\lg x} = 100^{\lg 100} = 100^2$; $100x = 100 \cdot 100 = 100^2$.

Отже, $x = 100$ — корінь.

$$2) x^{\lg x} = 0,1^{\lg 0,1} = 0,1^{-1} = \frac{1}{0,1} = 10; \quad 100x = 100 \cdot 0,1 = 10.$$

Отже, $x = 0,1$ — корінь.



Відповідь: 100; 0,1.

5. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\lg x = 1 - x$ графічно.

Розв'язання

В одній і тій самій системі координат будуюмо графіки функції $y = \lg x$ і $y = 1 - x$ (рис. 165). Абсциса точки перетину побудованих графіків дорівнює 1. Отже, $x = 1$ — корінь даного рівняння.

Відповідь: 1.

Вправи:

Найпростіші логарифмічні рівняння.

$$\log_{0,5}(x^2+3x+10)=-3;$$

$$\text{ОДЗ: } x^2+3x+10>0;$$

$$x^2+3x+10=0;$$

$$D=-31, \text{ то } x^2+3x+10>0 \text{ для будь-якого } x.$$

$$x^2+3x+10=0,5^{-3};$$

$$x^2+3x+10=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3};$$

$$x^2+3x+10=8;$$

$$x^2+3x+2=0;$$

$$x_1=-1; x_2=-2.$$

$$\text{Відповідь: } -2; -1.$$

Рівняння, що розв'язуються за допомогою використання властивостей логарифмів та способу потенціювання.

$$\log_2(x-1) + \log_2(3x-2)=2;$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0; \\ 3x-2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1; \\ x > \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$x \in (1; +\infty)$$

Використовуючи властивість суми логарифмів маємо:

$$(x-1)(3x-2)=4;$$

$$3x^2-5x+2=4;$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0;$$

$$D = 49.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь: 2.

Рівняння, що розв'язуються методом заміни змінної.

$$2 \log_3^2 x + 3 \log_3 \frac{1}{x} - 2 = 0.$$

ОДЗ: $x > 0$.

Використовуючи властивість логарифма степеня маємо:

$$2 \log_3^2 x - 3 \log_3 x - 2 = 0;$$

Скористаємося заміною.

Нехай $\log_3 x = t$, тоді маємо рівняння:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0;$$

$$D = 25;$$

$$t_1 = 2; \quad t_2 = -0,5.$$

$$\log_3 x = 2; \quad x = 9;$$

$$\log_3 x = -0,5;$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $9; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рівняння, в якому використовується формула переходу до нової основи логарифма.

$$3 \log_3(4x-1) + \log_{4x-1} 3 = 4;$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4x - 1 > 0; \\ 4x - 1 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{4}; \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

Нехай $\log_3(4x-1)=t$;

$$3t + \frac{1}{t} - 4 = 0$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0;$$

$$D=4;$$

$$t_1=1; t_2=\frac{1}{3}.$$

$$1). \log_3(4x-1)=1;$$

$$x_1=1.$$

$$2). \log_3(4x-1)=\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{4}.$$

Домашнє завдання:

Пройти онлайн-тест за посиланням:

<https://naurok.com.ua/test/join?gamecode=9613239>