

2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

При вирішенні геодезичних задач на місцевості закріплюють або намічають характерні точки. За результатами вимірювань необхідних геометричних елементів (кутів, довжин ліній, перевищень) визначають шукані координати і висоти точок. Вимірювання складають основний зміст всіх видів геодезичних робіт, пов'язаних з отриманням кількісних характеристик досліджуваних об'єктів.

Якість вимірювань характеризується їх точністю. Теорія математичної обробки вимірів розробляє раціональні прийоми і методи обробки результатів вимірювань і оцінки їх точності.

2.1. Види вимірювань

Всі величини, що використовуються в топографо-геодезичній практиці, можна розділити на *виміряні* та *обчислені*. Геодезичні вимірювання поділяються на:

- *кутові* (горизонтальні та вертикальні кути, одиниця вимірювань - градус);
- *лінійні* (відстані між точками, метр);
- *висотні* (перевищення між точками, мм).

По точності вимірювання можуть бути:

- *високоточні*;
- *середньої* точності;
- *технічної* точності.

По характеру впливу умов вимірювання на точність результатів поділяють *рівноточні* і *нерівноточні* виміри.

Рівноточними вимірами називаються однорідні результати, отримані при вимірах шуканої величини в однакових умовах (інструмент, метод виміру, кількість прийомів, кваліфікація спостерігача, зовнішні умови).

При недотриманні цих умов результати вимірювань називаються *нерівноточними*.

Для забезпечення однакового впливу результатів вимірів на результати обчислень всі вимірювання, по суті, приводяться до рівноточних введенням відповідних коефіцієнтів – *ваг вимірювань*.

2.2. Похибки вимірювань

Будь-які вимірювання, як би ретельно вони не виконувалися, завжди супроводжуються похибками, тобто відхилення результатів вимірювань від істинних значень вимірюваних величин:

$$\Delta = l - X,$$

де l – результат вимірювання;

X – істинне значення вимірюваної величини.

Похибки вимірювань можуть бути *грубими*, *випадковими* і *систематичними*.

Вимірювання вважаються *грубими*, якщо похибки їх результатів перевищують допустиму величину – *граничну похибку*. Такі вимірювання

містять грубі помилки або промахи. Для їх виключення виконуються контрольні вимірювання.

Систематичні похибки входять в кожен результат вимірювання за строго визначеним законом. Вони діляться на *постійні* і *змінні*. Систематичні похибки повинні бути виявлені і видалені з результатів вимірювань. Для цього використовують спеціальні методики вимірів, дослідження та перевірки приладів, виконання вимірювань в різний час доби, при різних погодних умовах і т. д.

Випадкові похибки спотворюють результат вимірювань випадковим чином, вони непередбачувані при конкретному вимірі. Але при великому числі вимірювань володіють певними властивостями, які враховуються при обробці вимірювань.

2.3. Властивості випадкових похибок

На основі аналізу експериментальних даних і теоретичних досліджень встановлено такі властивості випадкових похибок:

1) *властивість симетрії*: рівні за величиною, але протилежні за знаком похибки рівно ймовірні, тобто

$$p(-\Delta) = p(+\Delta);$$

2) *властивість компенсації*: сума похибок $\Sigma\Delta$, поділена на число вимірювань n прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0;$$

3) *властивість розсіювання*: при даних умовах вимірів відношення суми квадратів похибок до кількості вимірів (n) є постійною величиною при $n \rightarrow \infty$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta^2]}{n} = \sigma^2,$$

де σ - стандарт вимірювань (теоретичне значення середньої квадратичної похибки);

4) *властивість обмеженості*: випадкова похибка за абсолютною величиною не може перевершити якусь величину, звану граничною похибкою, тобто

$$-\Delta_{ep.} \leq \Delta \leq +\Delta_{ep.};$$

5) *властивість пропорційності*: для будь-яких умов вимірювань маємо

$$\frac{\Delta_{ep.}}{\sigma} = const$$
$$\Delta_{ep.} = t \cdot \sigma,$$

де t – коефіцієнт, що визначається по таблиці розподілу Стюдента (табл. 2.1) в залежності від числа надлишкових вимірювань $r = (n - k)$ та довірчої ймовірності p .

б) *властивість щільності*: менші за абсолютною величиною похибки зустрічаються частіше, ніж великі, тобто, якщо $|\Delta_1| > |\Delta_2|$, то $p(\Delta_1) < p(\Delta_2)$.

2.4. Точність вимірювань

Під точністю вимірювань розуміють їх якість, тобто близькість результату вимірювання до істинного (точного) значенням вимірюваної величини. Для відображення точності вимірювань в геодезії використовуються наступні характеристики:

- *стандарт*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}};$$

- *середня похибка*:

$$\Theta = \frac{1}{n} [|\Delta|] \approx 0,8\sigma;$$

• *ймовірна похибка r* – значення випадкової похибки, по відношенню до якої рівноймовірна поява більшої або меншої за абсолютною величиною похибки:

$$r = 0,7 \sigma;$$

- *відносна похибка* (застосовується для лінійних вимірювань):

$$\Delta_{\text{відн.}} = \frac{\Delta_{\text{абс.}}}{L} = \frac{1}{L : \Delta_{\text{абс.}}};$$

• *середня квадратична похибка* – визначається за формулою Гаусса не по всій генеральній сукупності вимірів, коли $n \rightarrow \infty$, а по конкретній вибірці при фіксованому n :

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

(m - це емпіричне значення стандарту – при $n \rightarrow \infty$ маємо $m \rightarrow \sigma$);

- *гранична похибка*:

$$\Delta_{\text{гр.}} = t \cdot \sigma \text{ або } \Delta_{\text{гр.}} = t \cdot m.$$

На практиці коефіцієнт t приймається рівним 2 або 3, тобто

$$\Delta_{\text{гр.}} = 2 \cdot m \text{ (з довірчою ймовірністю 0,95)}$$

або

$$\Delta_{\text{гр.}} = 3 \cdot m \text{ (з довірчою ймовірністю 0,997)}.$$

Наприклад, якщо при вимірюванні кутів з середньою квадратичною похибкою $m_{\beta} = 5''$ обрано $\Delta_{\text{гр.}} = 2 m = 10''$, то всі результати вимірювань з похибкою $\Delta > \Delta_{\text{гр.}}$ відбраковуються і не приймаються в подальшу обробку.

Для відповідальних вимірювань приймається $\Delta_{\text{гр.}} = 2m$, а для менш відповідальних - $\Delta_{\text{гр.}} = 3m$.

2.5. Формула Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки

Формула Гаусса може застосовуватися у випадках, коли відомі істинні або фактичні похибки Δ вимірюваних величин X . У більшості випадків справжнє значення вимірюваних величин нам невідомо, тому невідомі і істинні значення похибок вимірювань Δ .

Нехай величина X рівноточно виміряна n разів. Тоді істинні похибки визначаються за формулами:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 - X = \Delta_1 \\ l_2 - X = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ l_n - X = \Delta_n \end{array} \right\} .$$

Обчислимо середнє арифметичне з усіх результатів вимірювань

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} .$$

Позначимо відхилення результатів вимірювань l_i від їх середнього арифметичного значення L через v_i ($i=1,2,3,\dots,n$):

$$\left. \begin{array}{l} l_1 - L = v_1 \\ l_2 - L = v_2 \\ \dots\dots\dots \\ l_n - L = v_n \end{array} \right\} .$$

Віднімемо v_i від Δ_i для кожного $i=1,2,3,\dots,n$ (наприклад, $\Delta_1 - v_1 = (l_1 - X) - (l_1 - L)$). Тоді маємо n рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} L - X = \Delta_1 - v_1 \\ L - X = \Delta_2 - v_2 \\ \dots\dots\dots \\ L - X = \Delta_n - v_n \end{array} \right\} .$$

При великому числі вимірювань $(L - X)$ - деяка мала величина ε , яка прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$ (властивість компенсації випадкових похибок). Позначимо $L - X = \varepsilon$. Тоді маємо:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = v_1 - \varepsilon \\ \Delta_2 = v_2 - \varepsilon \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_n = v_n - \varepsilon \end{array} \right\} .$$

Складемо квадрати Δ_i , тобто:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2 = [\Delta^2] = [v^2] + 2 \cdot \varepsilon \cdot [v] + n \cdot \varepsilon^2 .$$

Сума v_i дорівнює нулю, оскільки

$$[v] = [l] - n \frac{[l]}{n} = 0$$

Тому при будь-якому числі вимірювань

$$[\Delta^2] = [v^2] + n \cdot \varepsilon^2,$$

або

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \varepsilon^2$$

Для того, щоб знайти ε^2 , складемо рівняння $l_i - L = v_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$):

$$[\Delta] = [v] + n \cdot \varepsilon;$$

$$[\Delta] = n \cdot \varepsilon;$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = \varepsilon;$$

$$\varepsilon^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + \frac{2 \cdot [\Delta_i \Delta_j]}{n^2}.$$

Або, враховуючи *властивість компенсації*, маємо

$$\varepsilon^2 = \frac{[\Delta^2]}{n^2}$$

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \varepsilon^2 \quad \frac{[\Delta^2]}{n}$$

Підставимо ε^2 в рівняння $\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \varepsilon^2$, замінимо $\frac{[\Delta^2]}{n}$ на m^2 і отримаємо

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Виконаємо перетворення одержаної формули:

$$m^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{[v^2]}{n}$$

$$m^2 \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{[v^2]}{n}$$

Остаточно знайдемо квадрат середньої квадратичної похибки m^2 :

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}$$

Таким чином, формула для обчислення середньої квадратичної похибки вимірювань має вигляд (формула Бесселя):

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

А середня квадратична похибка визначення m обчислюється за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$$

2.6. Принцип арифметичної середини

Нехай в результаті рівноточних вимірювань величини X отримані результати $l_1, l_2, \dots, l_n$. Необхідно знайти найбільш достовірне значення вимірюваної величини і оцінити його точність.

Позначимо найбільш достовірне значення вимірюваної величини через L і знайдемо відхилення результатів вимірювань l_i від L

$$v_i = l_i - L \quad (i=1,2,3,\dots,n).$$

Знайдемо

$$\frac{[v]}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (l_i - L)$$

Визначимо L за умови, що дотримується *властивість компенсації* випадкових похибок,

$$L = \frac{[l]}{n}$$

Використовуючи *властивість розсіювання* випадкових похибок знайдемо ймовірне значення L за умови, що $[v^2] = \min$.

$$F = \sum v^2 = \sum_1^n (l_i - L)^2$$

Візьмемо похідну від F по L і прирівняємо її до нуля

$$\frac{dF}{dL} = F' = -2 \cdot \sum_1^n (l_i - L) = 0.$$

Отже

$$\sum_1^n (l_i - L) = 0$$

Відповідно до цього маємо

$$\sum_1^n l_i - n \cdot L = 0$$

звідки остаточно

$$L = \frac{[l]}{n}$$

Таким чином, для ряду багаторазових вимірювань *середнє арифметичне* з усіх результатів вимірювань є *найбільш вірогідним* значенням вимірюваної величини або *ймовірним* значенням. Середня квадратична похибка *ймовірного* значення обчислюється за формулою:

$$M_L = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

2.7. Точкове та інтервальне оцінювання вимірювань

При багаторазових рівноточних вимірах однієї величини точкова оцінка вимірювань зводиться до обчислення:

- а) ймовірного значення L ;
- б) середньої квадратичної похибки вимірювань m_L ;
- в) середньої квадратичної похибки ймовірного значення вимірюваної величини m_L . Точкова оцінка вимірювань величини не характеризує справжнє її значення, а лише прагне до нього при необмеженому збільшенні кількості вимірювань.

Певною мірою цю прогалину заповнює інтервальна оцінка, яка із заданою довірчою ймовірністю встановлює інтервал, усередині якого знаходиться істинне значення вимірюваної величини. Для визначення інтервалу використовується гранична похибка $\Delta_{гр.}$:

$$L - \Delta_{гр.} \leq X \leq L + \Delta_{гр.}$$

де X – істинне значення вимірюваної величини;

L – ймовірне значення вимірюваної величини.

Гранична похибка $\Delta_{гр.}$ для середнього арифметичного значення L визначається виходячи з властивості обмеженості випадкових величин.

У нашому випадку

$$\Delta_{гр.} = t \cdot m_L.$$

Коефіцієнт t залежить від прийнятої довірчої ймовірності p і числа надлишкових вимірювань k . Числа t , k , p пов'язані математичною залежністю, яку називають законом Стюдента.

Таблиця 2.1 – Закон Стюдента

$\begin{matrix} p \\ N \end{matrix}$	0,95	0,9545	0,99	0,9973
2	4,30	4,52	9,92	18,5
3	3,18	3,31	5,84	9,2
4	2,78	2,87	4,61	6,63
5	2,57	2,65	4,04	5,5
10	2,23	2,28	3,17	3,96
20	2,08	2,13	2,85	3,42
∞	-	2,00	-	3,00

2.8. Середня квадратична похибка функції виміряних величин

Величина, що визначається, часто є функцією деяких виміряних величин (наприклад, площа прямокутника S є функцією його довжини a та ширини $b \rightarrow S=a \cdot b$).

Нехай задана функція $y = f(x_i)$. Необхідно знайти середню квадратичну похибку функції m_y при відомих значеннях середніх квадратичних похибок аргументів m_{x_i} .

Знайдемо приріст функції Δy , розклавши функцію в ряд Тейлора і обмежившись членами першого порядку:

$$\Delta y = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \Delta x_i$$

Переходячи до середньої квадратичної похибки маємо

$$m_y^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 m_{xi}^2$$

Наприклад, середнє арифметичне значення багаторазових рівноточних вимірів визначається за формулою:

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$$

За умовою усі виміри рівноточні, тобто середні квадратичні похибки результатів вимірів

$$m_{l1} = m_{l2} = \dots = m_{ln} = m_l$$

Враховуючи, що часткова похідна функції L за l_i дорівнює

$$\frac{\partial L}{\partial l_i} = \frac{1}{n}$$

знайдемо середню квадратичну похибку функції

$$m_L^2 = \frac{1}{n^2} m_{l1}^2 + \frac{1}{n^2} m_{l2}^2 + \dots + \frac{1}{n^2} m_{ln}^2 = \frac{n}{n^2} m_l^2$$

Остаточнo маємо

$$m_L = \frac{m_l}{\sqrt{n}}$$

2.9. Обробка подвійних рівноточних вимірювань

Сутність подвійних вимірювань полягає в тому, що однорідні величини вимірюються двічі. Наприклад, довжини ліній теодолітного ходу вимірюють в прямому і в зворотному напрямках.

Нехай надані результати двох рядів рівноточних вимірювань n однорідних величин

$$l_1' \text{ і } l_1'', \quad l_2' \text{ і } l_2'', \quad \dots, \quad l_n' \text{ і } l_n''.$$

Різниці подвійних вимірів будуть рівними:

$$d_1 = l_1' - l_1'', \quad d_2 = l_2' - l_2'', \quad \dots, \quad d_n = l_n' - l_n''.$$

Якщо б всі вимірювання були безпомилковими, то ці різниці дорівнювали б нулю. Отже, різниці подвійних вимірювань можна розглядати як випадкові істинні похибки. Тоді за формулою Гаусса середня квадратична похибка різниці подвійних вимірів буде дорівнює

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}}$$

Але

$$m_d^2 = m_{l'}^2 + m_{l''}^2 = 2m^2,$$

де m – середня квадратична похибка окремого виміру ($m = m_{I'} = m_{I''}$).
Звідси

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}.$$

Якщо $[d] \neq 0$, то при великому n (понад 30) у результатах вимірювань є систематична похибка

$$d_0 = \frac{[d_i]}{n}.$$

Випадкова складова похибки різниць подвійних вимірювань обчислюється за формулою

$$v_i = d_i - d_0.$$

Тоді за формулою Бесселя маємо

$$m_d = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{2(n-1)}}.$$