
1.- (prueba extraordinaria) El beneficio de una empresa viene dado por la función
$f(x) = \frac{225}{2} + 20x - \frac{1}{2}x^2$, donde x representa el gasto en publicidad.
a) Calcule el gasto x a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.
c) Represente gráficamente la función f.
d) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio máximo?

Resolución

$f(x) = \frac{225}{2} + 20x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x - 225 = 0 \Leftrightarrow \; x = \frac{40 \pm 50}{2}, \; x = 45, \; x = -5$

Como el gasto $x \geq 0$, f está definida en $[0, +\infty)$ y el beneficio es nulo para $x = 45$.

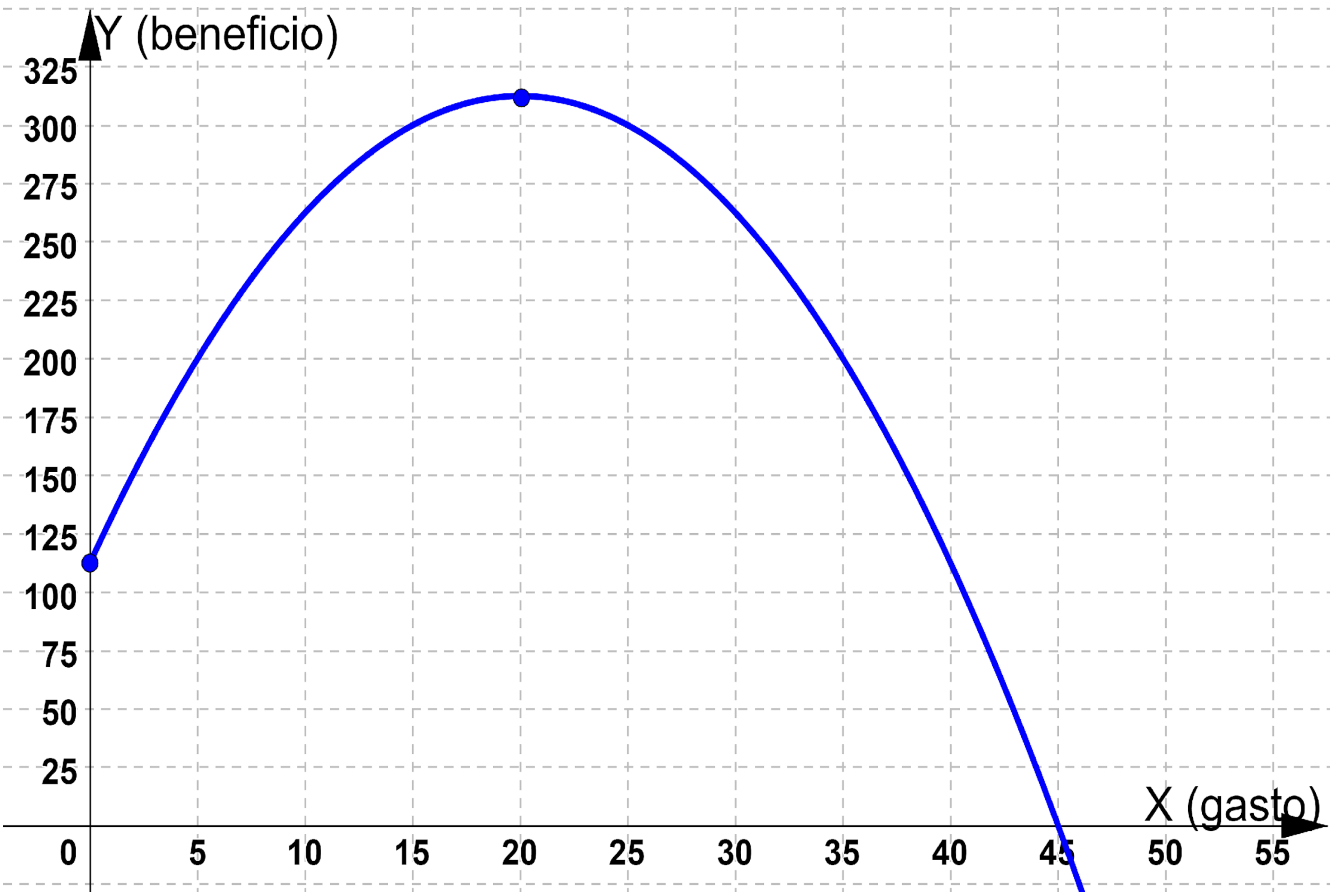
Como la gráfica de f es una parábola cóncava resulta que la empresa no obtiene beneficios a partir de un gasto en publicidad de $x \geq 45$

$f'(x) = 20 - x = 0 \Leftrightarrow x = 20, \;\; y = f(20) = \frac{225}{2} + 20.20 - \frac{1}{2}20^2 = 312,5$

Como la gráfica de f es una parábola cóncava resulta que f es creciente en el intervalo $(0, 20)$ y decreciente en el intervalo $(20, +\infty)$ siendo el punto V(20 ; 312,5) el máximo de la función.

O sea, el beneficio máximo es 312,5 y se obtiene para un gasto en publicidad de 20

Un esbozo de la gráfica de f sería:



2.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f(x) = \{2x + 1, \;\; si\ x < 2 \;\; x^2 - 8x + 17, \;\; si\ x \geq 2$

a) Represéntela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
c) Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde f´(x) = 0? Razone la respuesta.

Resolución

Para x ≠ 2, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f´(x) = \{2, \ \ si\, x < 2\ 2x - 8, \ \ si\, x > 2$

$f(x) = 2.2 + 1 = 5 = f(x) = f(2) = 2^2 - 8.2 + 17 = 5$ ⇒ f es continua en x = 2

$f´(x) = 2 \neq f´(x) = 2.2 - 8 = -4$ ⇒ f NO es derivable en x = 2.

Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f´(x)	+		–	0	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en $(2, 4)$

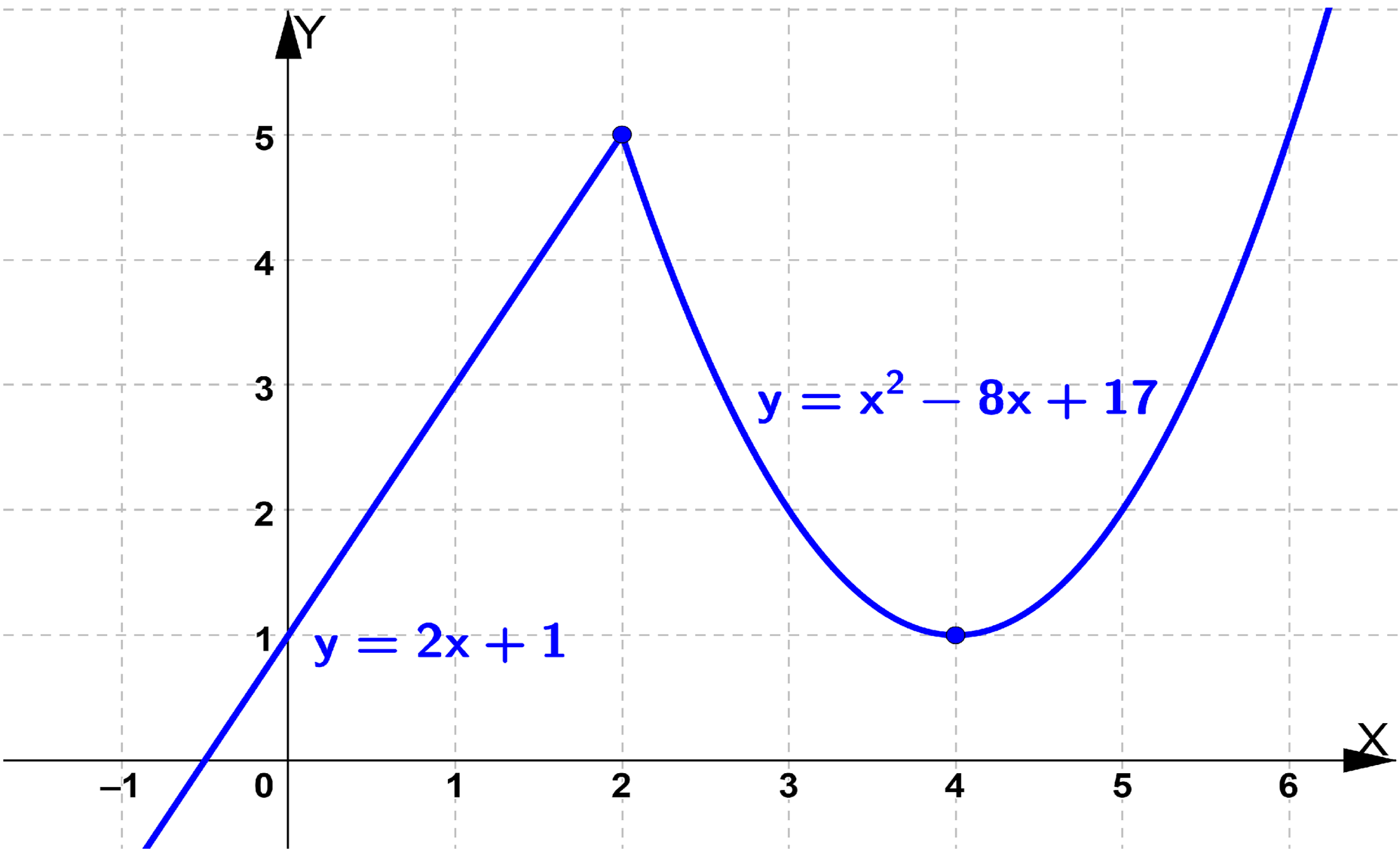
Máximo relativo: x = 2, y = f(2) = 5, punto (2, 5).

Mínimo relativo: x = 4, $y = f(4) = 4^2 - 8.4 + 17 = 1$, punto (4, 1)

Como vemos, sólo se cumple que f´(x) = 0 en el mínimo, x = 4. En el máximo no, porque ∄ f´(2).

Para la gráfica usamos también que f(0) = 2.0 + 1 = 1, la semirrecta corta al eje Y en (0, 1).

Hagamos un esbozo de la gráfica de f:



3.- La derivada de una función f definida de R en R es: $f´(x) = x^2 + x - 6$.
a) Determine, si es posible, para qué valores de x alcanza f su máximo y su mínimo relativos.

Resolución

$f´(x) = x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}, \ \ x = -3, \ \ x = 2$; $f´´(x) = 2x + 1$

$f''(-3) = 2(-3) + 1 = -5 < 0$, máximo relativo para $x = -3$

$f''(2) = 2.2 + 1 = 5 > 0$, mínimo relativo para $x = 2$

b) Calcule un punto de inflexión de esta función y determine si es único o pueden existir otros.

Resolución

Si en x se alcanza un punto de inflexión, entonces $f''(x) = 2x + 1 = 0$. Luego, $x = \frac{-1}{2}$ (sólo existe este)

c) Sabiendo que $f(0) = 3$, deduzca razonadamente si es $f(1) < 3$ o es $f(1) > 3$.

Resolución

Como el mínimo de f se alcanza en $x = 2$ y el máximo en $x = -3$, entonces f es decreciente en el intervalo $(-3, 2)$. Luego, $f(1) < f(0)$. O sea, $f(1) < 3$

4.- Dada la función $f(x) = \{\frac{-x}{4}, \quad si\ 0 \le x \le 2\ \frac{-1}{x}, \quad si\ 2 < x$

a) Dibuje la gráfica de esta función.

b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos.

Resolución

Para $x \neq 2$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \{\frac{-1}{4}, \quad si\ 0 \le x < 2\ \frac{1}{x^2}, \quad si\ 2 < x$

$f(x) = f(2) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = f(x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ f es continua en $x = 2$

$f'(x) = \frac{-1}{4} \neq f'(x) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ f NO es derivable en $x = 2$.

Vemos que $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 2)$ y que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(2, +\infty)$

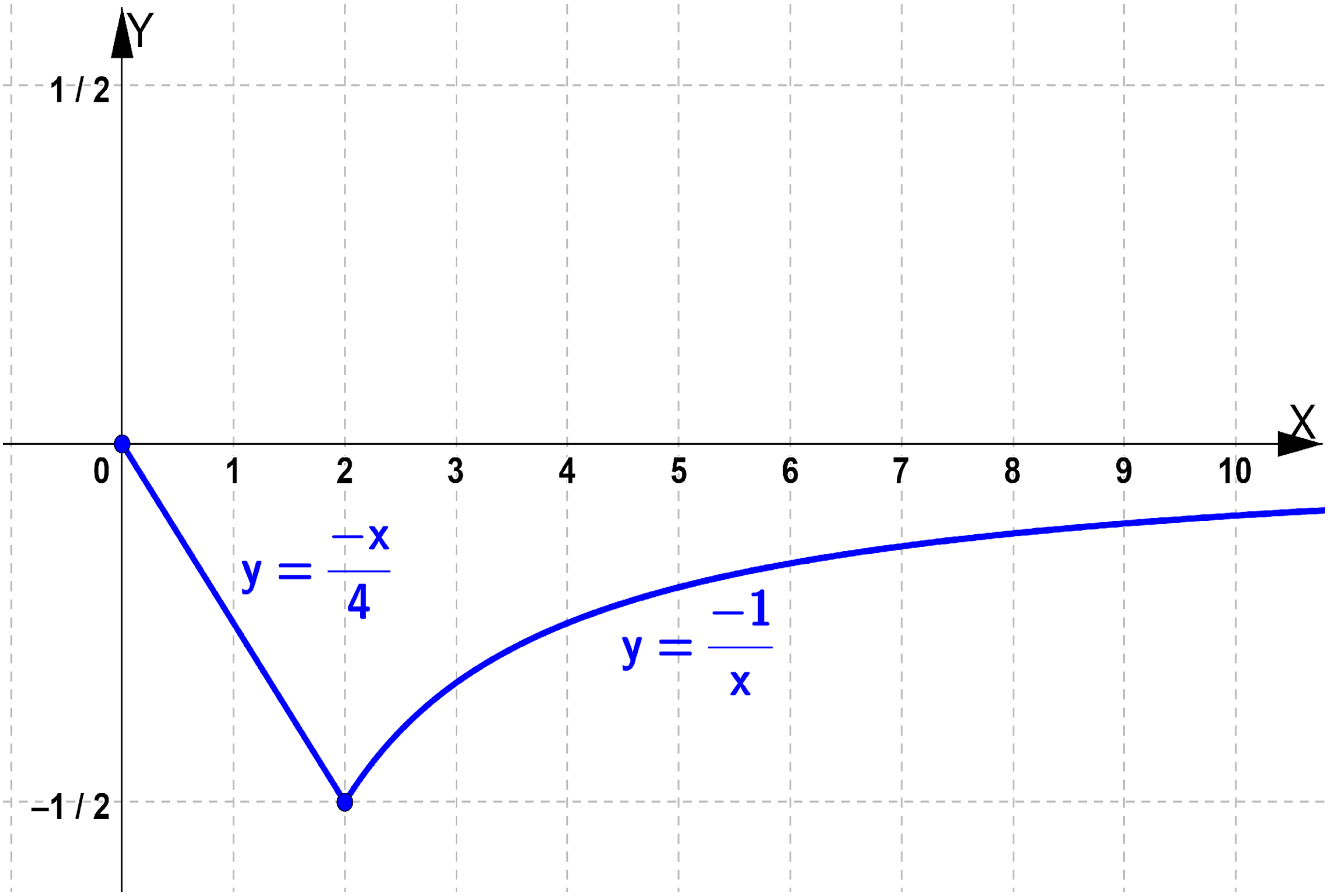
Luego, f es decreciente en $(0, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$

Mínimo relativo: $x = 2$, $y = f(2) = \frac{-1}{2}$, punto $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$. No hay máximo.

Como f es continua en su dominio, no hay asíntotas verticales.

Por otra parte, $f(x) = \frac{-1}{x} = 0$. Luego, la asíntota horizontal en $+\infty$ es el eje X.

Un esbozo de la gráfica de f sería:



5.- El precio en Bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por la función C: [0, 5] → R definida así: $C(t) = 100(t^2 - 6t + 25)$, donde t representa el tiempo medido en horas.

a) Dibuje la gráfica de C, indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.

b) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

c) Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

Resolución

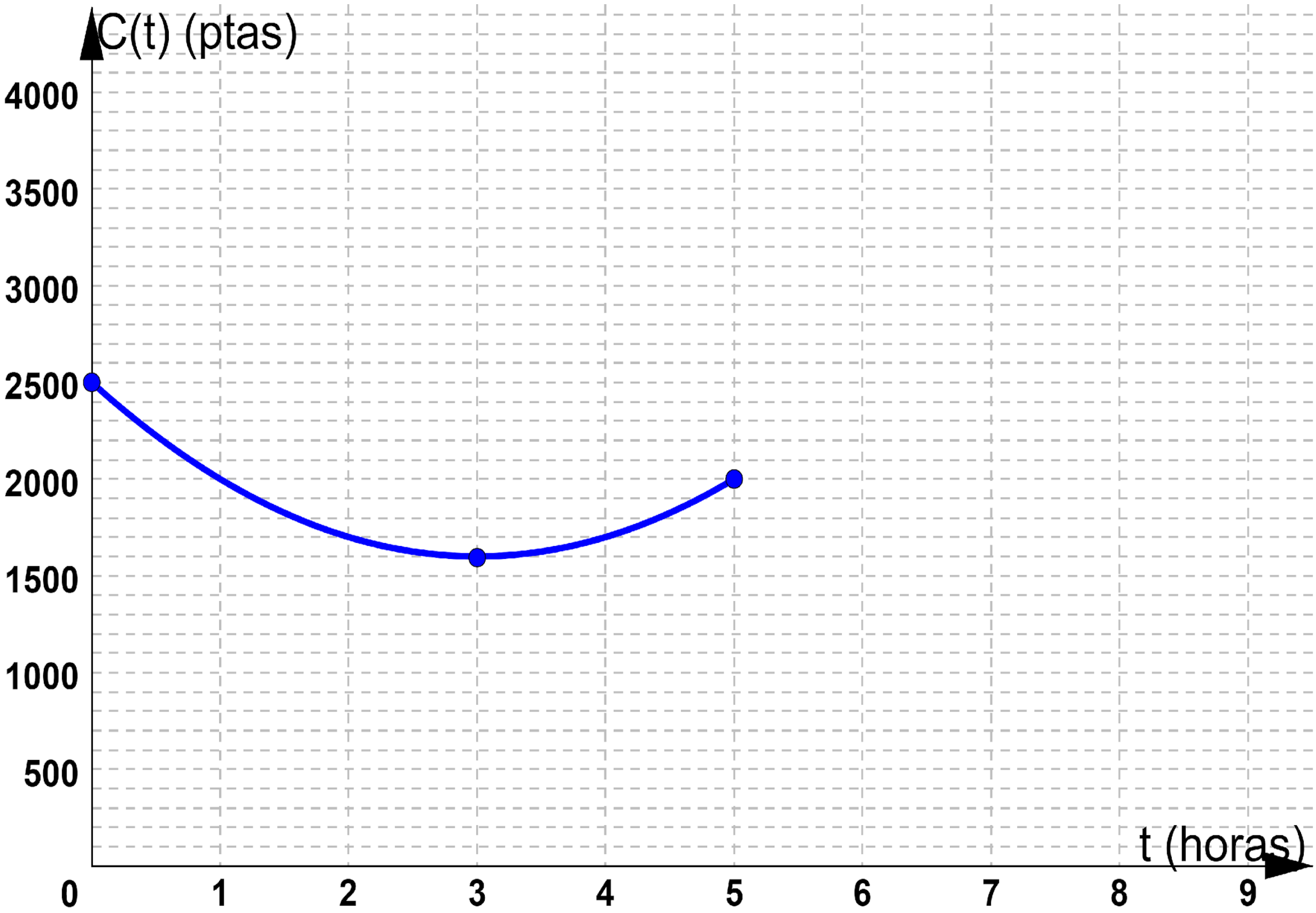
$C(t) = 100(t^2 - 6t + 25) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$, imposible

Además, $C(0) = 100(0^2 - 6.0 + 25) = 2500$ y $C(5) = 100(5^2 - 6.5 + 25) = 2000$

$C'(t) = 100(2t - 6) = 0 \Leftrightarrow t = 3$, $C(3) = 100(3^2 - 6.3 + 25) = 1600$.

Luego, la gráfica de C(t) es un trozo de parábola convexa de convexa, que no corta al eje de abscisas y cuyo vértice, mínimo absoluto es V(3, 1600).

Un esbozo de su gráfica sería:



b) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?

Resolución

El valor máximo de las acciones es 2500 ptas (al principio de la jornada) y el valor mínimo 1600 ptas a las 3 h del comienzo de la jornada.

c) Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

Resolución

Ya que C(t) va creciendo a partir de las 3 h, el precio de las acciones tendería a subir.

La cotización al cabo de las ocho horas sería $C(8) = 100(8^2 – 6.8 + 25) = 4100$ ptas

6.- Sea la función $f(x) = \{\frac{x^2}{2},\ \ si\ \ x < 2\ \ -x + 4,\ \ si\ \ 2\leq x < 4\ (x - 4)^2,\ \ si\ \ x\geq 4$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Represéntela gráficamente.

c) Halle sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución

Para x ≠ 2, x ≠ 4, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \{x, \ si \ x < 2 \ -1, \ si \ 2 < x < 4 \ 2x - 8, \ si \ x > 4$

$f(x) = \frac{2^2}{2} = 2 = f(x) = f(2) = -2 + 4 = 2$ ⇒ f es continua en x = 2

$f'(x) = 2 \neq f'(x) = -1$ ⇒ f NO es derivable en x = 2.

$f(x) = -4 + 4 = 0 = f(x) = f(4) = (4-4)^2 = 0$ ⇒ f es continua en x = 4

$f'(x) = -1 \neq f'(x) = 2.4 - 8 = 0$ ⇒ f NO es derivable en x = 4.

Conclusión: f es continua en R y derivable en R – {2 ; 4}

Como para x > 4, 2x – 4 > 0, entonces f´(x) = 0 ⇔ x = 0. Hagamos una tabla de signos de f´(x)

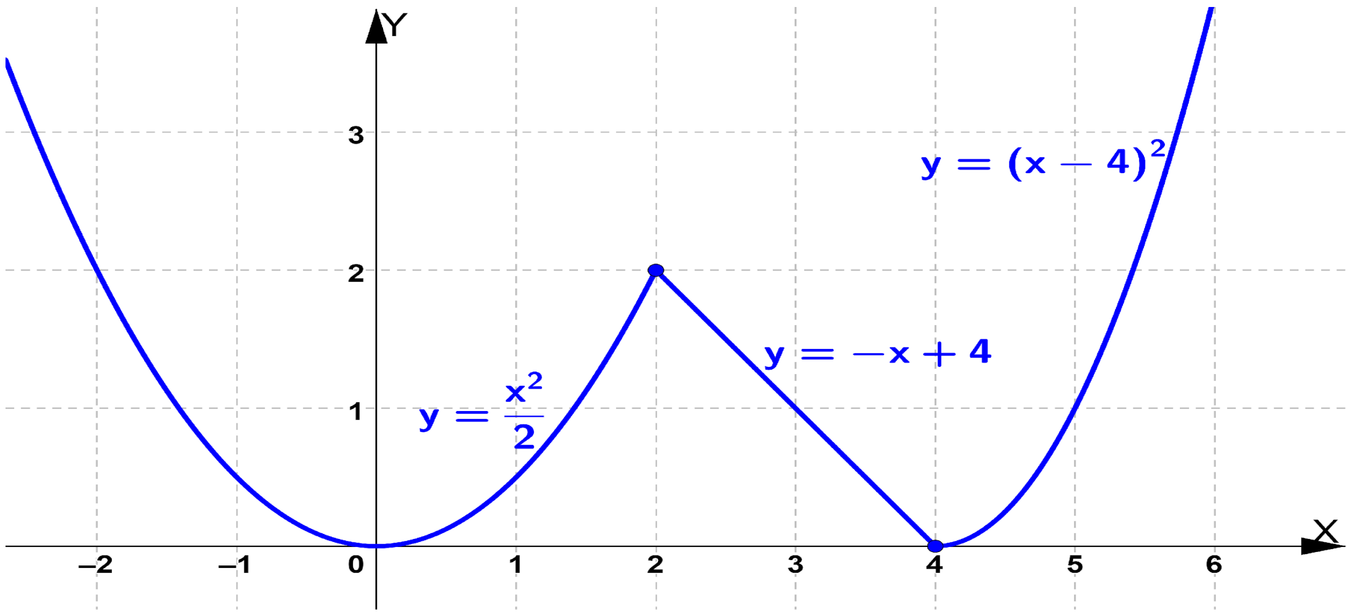
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f´(x)	–	0	+	∄	–	∄	+
f(x)	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 4)$ y creciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$

Mínimos relativos: x = 0, $y = f(0) = \frac{0^2}{2} = 0$, punto $(0, 0)$; x = 4, $y = f(4) = 0$, punto $(4, 0)$

Máximo relativo: x = 2, $y = f(2) = 2$, punto $(2, 2)$

Un esbozo de la gráfica de f sería:



7.- (prueba ordinaria)

a) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones: $g(x) = \frac{-1}{x}$ y h(x) = x sen x

Resolución $g'(x) = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$; h´(x) = 1 sen x + x cos x = sen x + x cos x

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos (–1, 0) y (0, 1).

Resolución

Hallemos la ecuación de la recta mencionada: $\frac{y-0}{x+1} = \frac{1-0}{0+1} = 1 \Rightarrow y = x + 1$. Luego, f´(x) = x + 1 f´(x) = 0 ⇔ x = –1. Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ +$
f´(x)	–	0	+
f(x)	decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty,\ -1)$ y creciente en $(-1,\ +\infty)$

8.- (prueba ordinaria) Dada la función

$f(x) = \{2x + a,\ \ si\ x \le -1\ \ -x^2 + 2,\ \ si\ -1 < x \le 1\ \ln ln\, x,\ \ si\ x > 1$

a) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en x = –1.

Resolución

Para x ≠ –1, x ≠ 1, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$f´(x) = \{2,\ \ si\ x < -1\ \ -2x,\ \ si\ -1 < x < 1\ \frac{1}{x},\ \ si\ x > 1$

Como debe ser continua en –1, $f(x)\ = f(x)\ = f(-1) \Rightarrow 2(-1) + a = -(-1)^2 + 2 \Rightarrow a = 3.$

b) Represente gráficamente la función anterior si a = 3.

c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos x = –1 y x = 1 para la función obtenida en el apartado anterior.

Resolución

Si a = 3, $f(x) = \{2x + 3,\ \ si\ x \le -1\ \ -x^2 + 2,\ \ si\ -1 < x \le 1\ \ln ln\, x,\ \ si\ x > 1$ y sabemos del apartado anterior que f es continua en x = –1.

$f(x)\ = f(1) = -1^2 + 2 = 1 \ne f(x)\ = \ln ln\, 1\ = 0$ ⇒ f NO es continua en x = 1 y, por tanto, tampoco es derivable

$f´(x)\ = 2\ = f´(x)\ = -2(-1) = 2\ \Rightarrow$ f es derivable en x = –1.

f´(x) = 0 ⇔ –2x = 0 ⇔ x = 0. Hagamos una tabla de signos de f´(x)

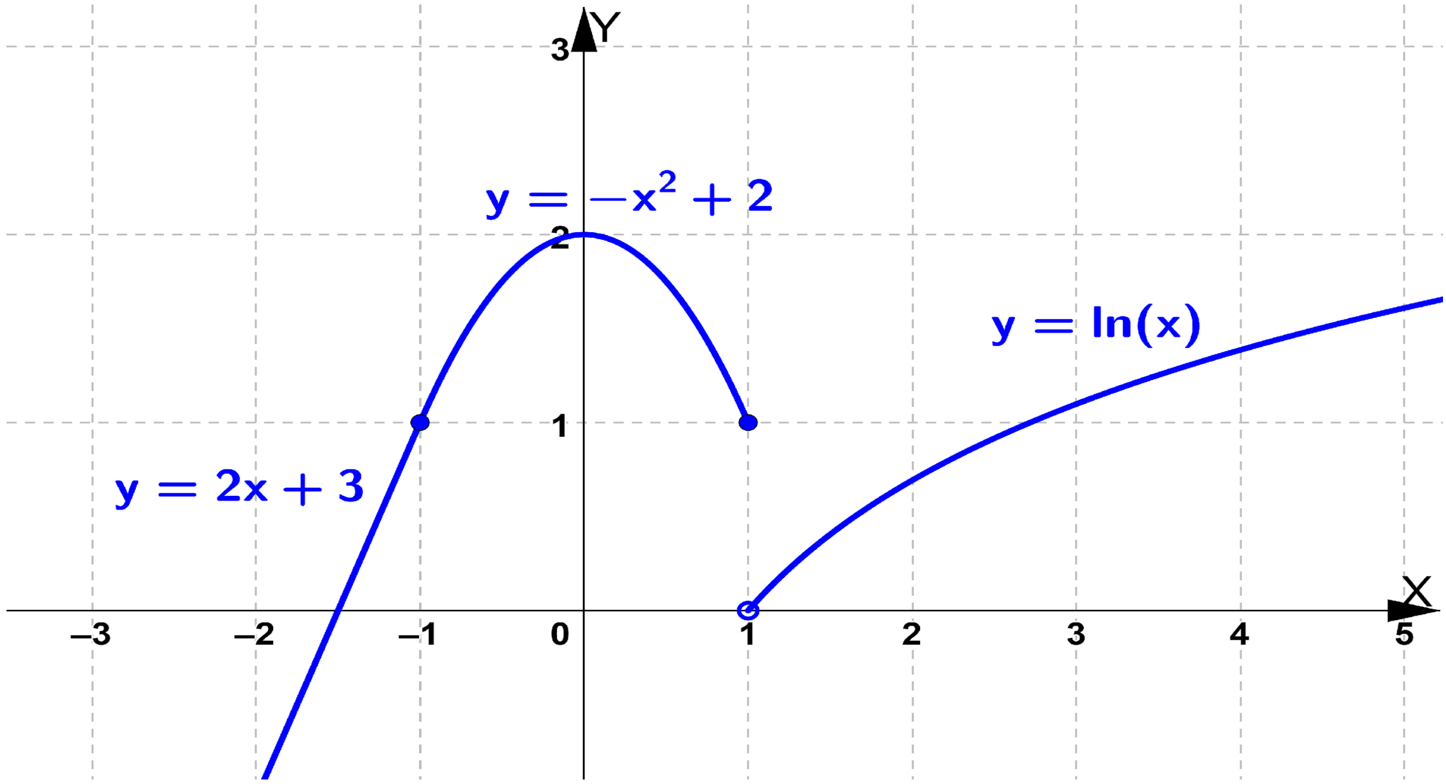
	$(-\infty,\ -$	-1	$(-1,\ 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\ +\infty)$
f´(x)	+	0	+	0	–	∄	+
f(x)	creciente	creciente	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$ y decreciente en $(0,\ 1)$

Máximo relativo: x = 0, $y = f(0) = 2.0 + 3 = 3$, punto $(0,\ 3)$

Mínimo relativo: x = 1, $y = f(1) = -1^2 + 2 = 1$, punto $(1,\ 1)$

Teniendo en cuenta además que la gráfica de f está formada por una semirrecta, un trozo de parábola y un trozo de la curva y = ln x, un esbozo de su gráfica es:



9.-

a) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, calcule a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en (–1, 2).

Resolución

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b \qquad f'(x) = 3x^2 + 2ax \qquad f''(x) = 6x + 2a.$$

Como un punto de inflexión es $(-1, 2) \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow 6(-1) + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$

$$\text{Y queda } f(x) = x^3 + 3x^2 + b$$

Como la gráfica pasa por $(-1, 2) \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^3 + 3(-1)^2 + b = 2 \Rightarrow b = 0$

Conclusión: debe ser $a = 3$, $b = 0$ y entonces $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3.

Resolución

$f(x) = x^3 - 1 \qquad f'(x) = 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = -1$

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$x_0 = 1 \quad ; \quad f'(x_0) = f'(1) = 3 \quad ; \quad f(x_0) = f(1) = 1^3 - 1 = 0$$

$$\text{rtg: } y = 3(x - 1) + 0 \Rightarrow \text{rtg: } y = 3x - 3$$

$$x_0 = -1 \quad ; \quad f'(x_0) = f'(-1) = 3 \quad ; \quad f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$$

$$\text{rtg: } y = 3(x + 1) - 2 \Rightarrow \text{rtg: } y = 3x + 1$$

10.- Sea $f(x) = \{2^x,\ \ si\ x \le -1\ \ -x^2 + 3,\ \ si\ -1 < x < 2\ x - 3,\ \ si\ x \ge 2$

a) Represente gráficamente la función y, a la vista de su gráfica, determine sus máximos y mínimos relativos, así como su crecimiento y decrecimiento.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

Resolución

Para x ≠ −1, x ≠ 2, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \{2^x \ln ln\, 2\,,\ \ si\ \ x <-\ 1\ \ -\ 2x,\ \ si\ \ -\ 1 < x < 2\ 1,\ \ si\ \ x > 2$

$f(x)\ = f(-\ 1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \neq f(x)\ =-\ (-\ 1)^2 + 3 = 2$ ⇒ f NO es continua en x = −1 y, por tanto, tampoco es derivable.

$f(x)\ \ =-\ 2^2 + 3 =-\ 1 = f(x)\ \ = f(2) = 2\ -\ 3 =-\ 1$ ⇒ f es continua en x = 2

$f'(x)\ \ =-\ 2.2 =-\ 4\ \neq\ f'(x)\ \ =\ 1\ \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 2.

Conclusión: f es continua en R – {−1} y derivable en R – {−1 ; 2}

Para x < −1, f´(x) = 2^x ln 2 > 0 y para x > 2, f´(x) = 1 > 0. Luego, f´(x) = 0 ⇔ −2x = 0 ⇔ x = 0.

Hagamos una tabla de signos de f´(x)

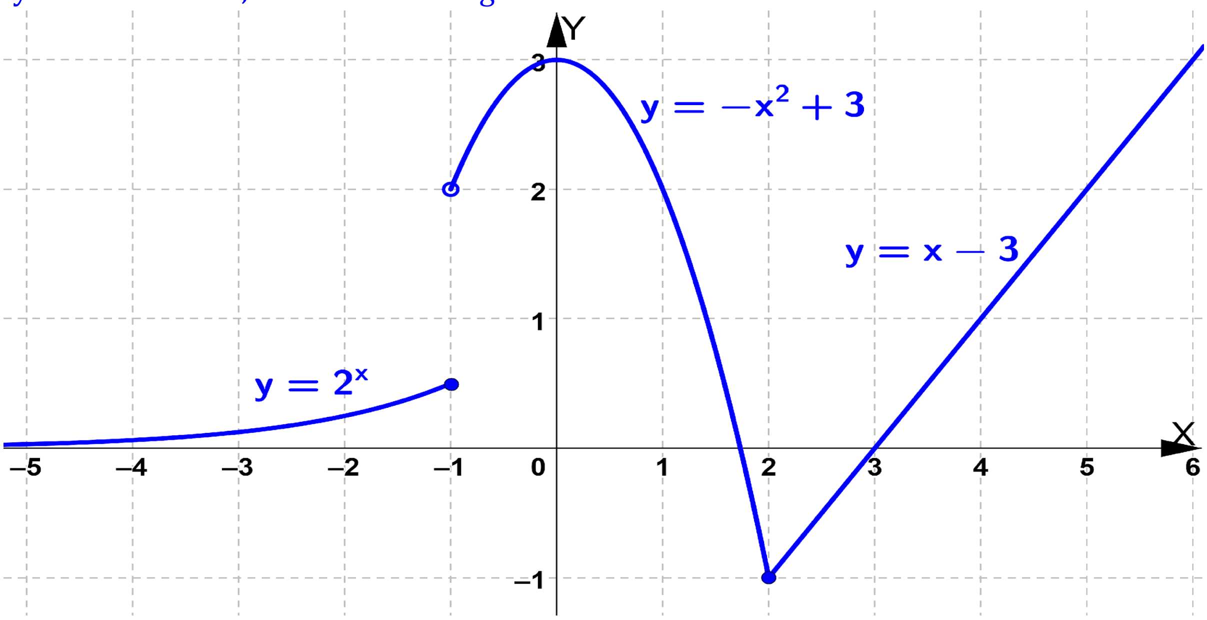
	$(-\ \infty,\ \ -$	$-\ 1$	$(-\ 1,\ 0)$	0	(0, 2)	2	$(2,\ \ +\ \infty)$
f´(x)	+	∄	+	0	–	∄	+
f(x)	creciente	$\frac{1}{2}$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\ \infty,\ 0) \cup (2,\ \ +\ \infty)$ y decreciente en $(0,\ 2)$

Máximo relativo: x = 0, $y\ =\ f(0) =-\ 0^2\ +\ 3\ =\ 3$, punto $(0,\ 3)$

Mínimo relativo: x = 2, $y\ =\ f(2) =-\ 1$, punto $(2,\ \ -\ 1)$

Teniendo en cuenta además que la gráfica de f está formada por un trozo de la curva y = 2x, un trozo de parábola y una semirrecta, un esbozo de su gráfica es:



11.- Se considera la siguiente función
$f(x) = \{\frac{-2}{x+1},\ \ si\ \ x <-\ 2\ \ -\ x^2\ -\ 2x\ +\ a,\ \ si\ \ -\ 2 \leq x\ <\ 0\ \frac{2}{x+1},\ \ si\ \ 0 \leq x$
a) Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a, ¿es f derivable?

Resolución

Para x ≠ −2, x ≠ 0, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo
$f'(x) = \{\frac{2}{(x+1)^2},\ \ si\ \ x <-\ 2\ \ -\ 2x\ -\ 2,\ \ si\ \ -\ 2 < x < 0\ \frac{-2}{(x+1)^2},\ \ si\ \ 0 < x$

Por ser continua en x = −2, $f(x)\ \ =\ f(x)\ \ =\ f(-\ 2) \Rightarrow \frac{-2}{-2+1} =-\ (-\ 2)^2\ -\ 2(-\ 2)\ +\ a \Rightarrow a\ =\ 2.$

Por ser continua en x = 0, $f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow -0^2 - 2.0 + a = \frac{2}{0+1} \Rightarrow a = 2$.

Veamos si es derivable:

En x = –2, $f'(x) = \frac{2}{(-2+1)^2} = 2 = f'(x) = -2(-2) - 2 = 2 \Rightarrow$ f es derivable en x = –2.

En x = 0, $f'(x) = -2.0 - 2 = -2 \neq f'(x) = \frac{-2}{(0+1)^2} = -2 \Rightarrow$ f es derivable en x = 0.

Luego, f es derivable en R.

b) Para el caso de a = 2, dibuje la gráfica de f.

Resolución

Para a = 2, $f(x) = \{\frac{-2}{x+1}, \; si \; x < -2 \;\; -x^2 - 2x + 2, \; si \; -2 \leq x < 0 \;\; \frac{2}{x+1}, \; si \; 0 \leq x$,
$f'(x) = \{\frac{2}{(x+1)^2}, \; si \; x < -2 \;\; -2x - 2, \; si \; -2 < x < 0 \;\; \frac{-2}{(x+1)^2}, \; si \; 0 < x$

Para x < –2, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ y para x > 0, $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$.

Luego, f´(x) = 0 ⇔ –2x – 2 = 0 ⇔ x = –1.

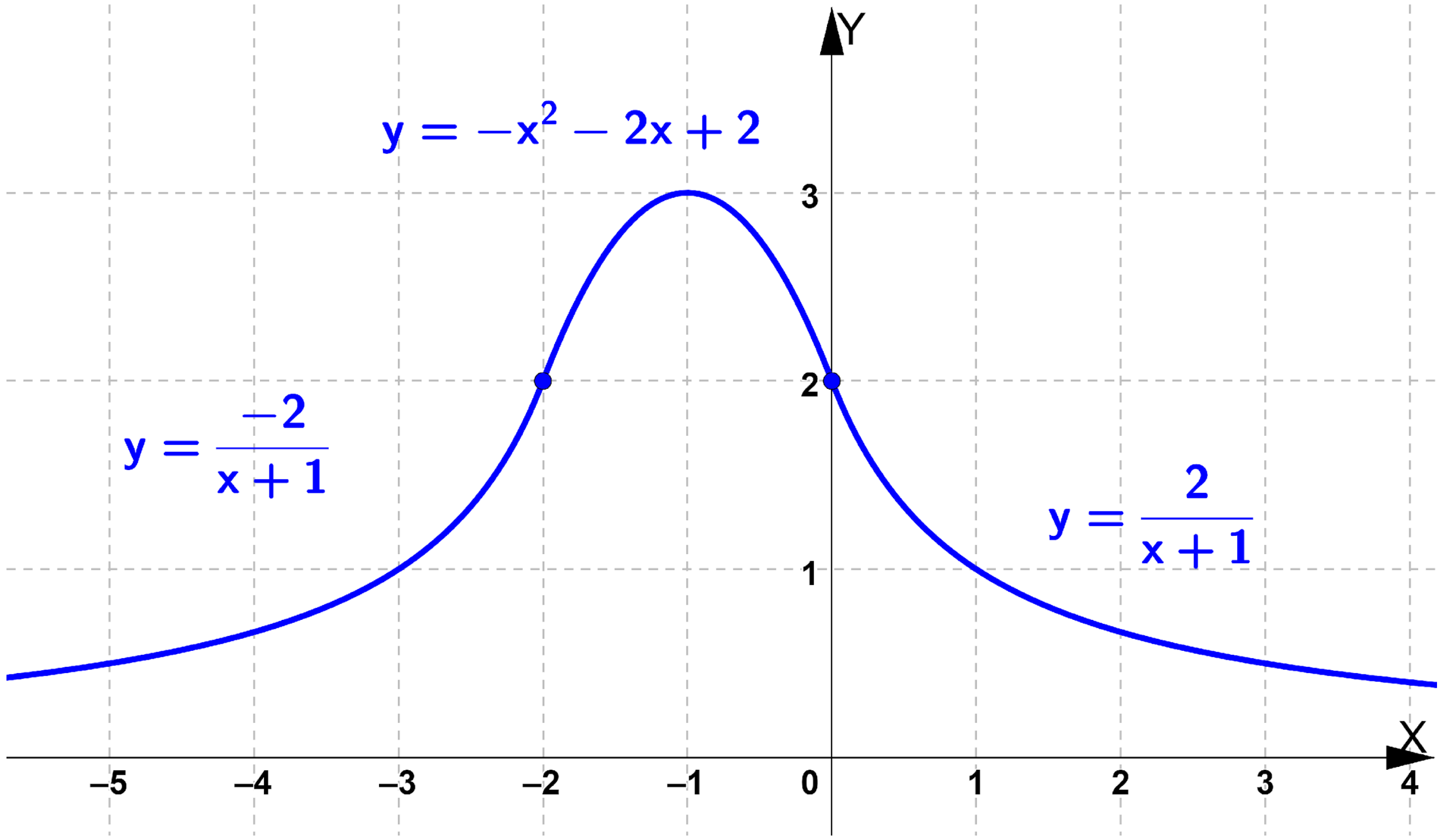
Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty, -$	-2	$(-2, -$	–1	(–1, 0)	0	$(0, +\infty)$
f´(x)	+	+	+	0	–	–	–
f(x)	creciente	creciente	creciente	máximo	decreciente	decreciente	decreciente

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-1, +\infty)$

Máximo relativo: x = –1, $y = f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 2 = 3$, punto $(-1, 3)$. No hay mínimo

Teniendo en cuenta además que la gráfica de f está formada por un trozo de la curva $y = \frac{-2}{x+1}$, un trozo de parábola y otro trozo de la curva $y = \frac{2}{x+1}$ y que $f(x) = 0$, un esbozo de su gráfica es:



12.- La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión $f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2}$

a) Represente gráficamente f.

b) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?

c) ¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

Resolución

Por el contexto, f está definida para t ≥ 0 ; $f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2} = \frac{5t - t^2}{2} = \frac{t(5-t)}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad t = 5$

$f'(t) = \frac{5-2t}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} = 2,5$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\,\frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = \frac{25}{8} = 3,125$.

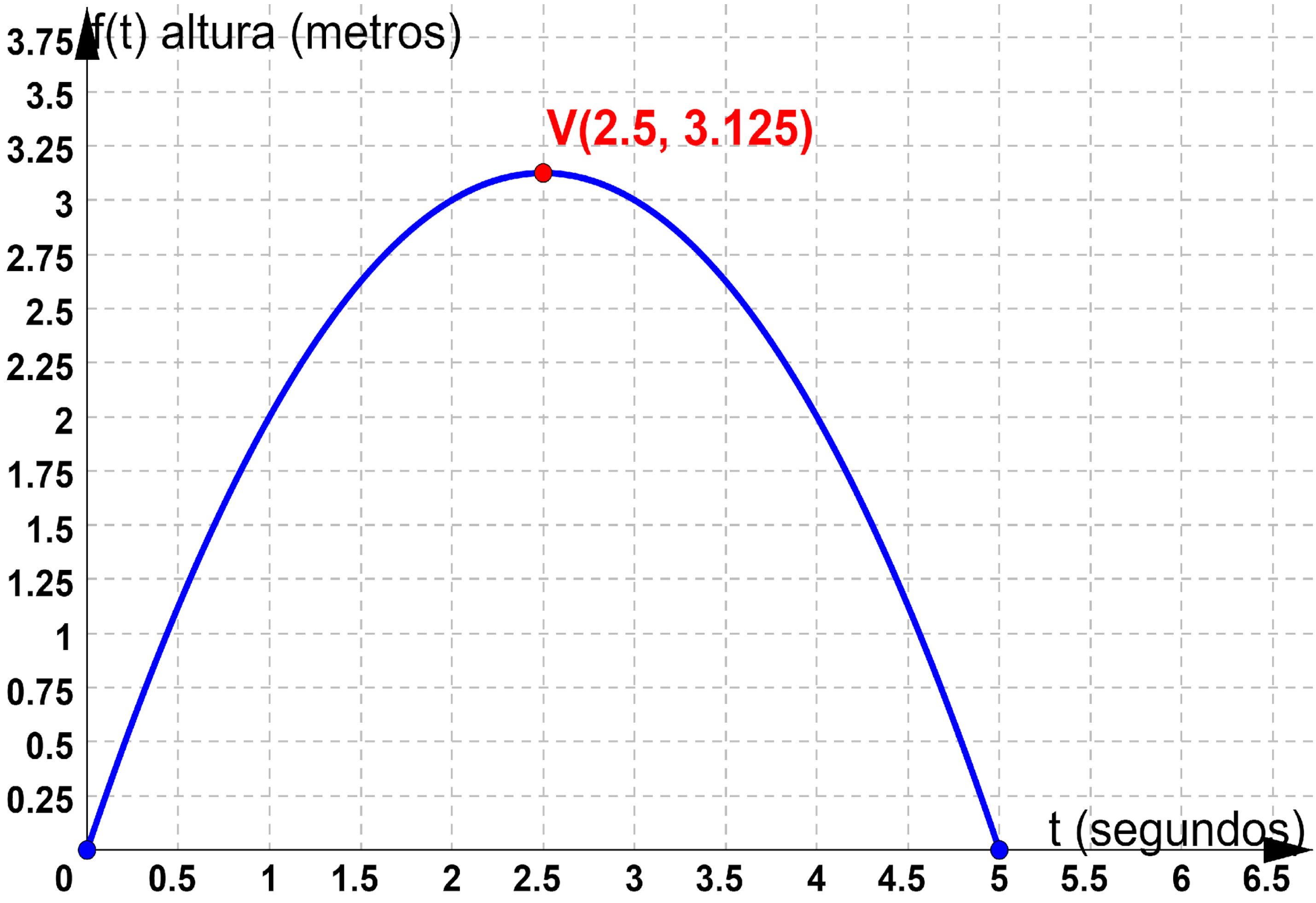
Luego, la gráfica de f es una parábola cóncava que corta a los ejes en (0, 0) y (5, 0) y tiene por vértice (máximo absoluto) V(2,5 ; 3,125)

Al cabo de 4 segundos la altura de la pelota es $f(4) = \frac{4(5-4)}{2} = 2$ metros

Como $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad t = 5$, la pelota llega al suelo a los 5 segundos

Al ser el máximo absoluto V(2,5 ; 3,125), la pelota alcanza su altura máxima a los 2,5 segundos y esta altura es 3,125 metros.

Un esbozo de su gráfica es



OTROS DEL 2000 (COU II)

1.- Sea la función f: R → R definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Calcule los valores de los coeficientes b, c y d para que f tenga un extremo relativo en el punto (0, 4) y su gráfica pase por el punto (2, 0).

Resolución

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

Como un extremo relativo es (0, 4) ⇒ $f'(0) = 0 \Rightarrow 3.0^2 + 2b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$. Luego, $f(x) = x^3 + bx^2 + d$

Como la gráfica pasa por (0, 4) ⇒ $f(0) = 4 \Rightarrow 0^3 + b.0^2 + d = 4 \Rightarrow d = 4$. Luego, $f(x) = x^3 + bx^2 + 4$

Como la gráfica pasa por (2, 0) ⇒ $f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + b.2^2 + 4 = 0 \Rightarrow b = -3$.

Conclusión: debe ser $b = -3$, $c = 0$, $d = 4$ y entonces $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) Determine los valores de la variable x en los que la función $g(x) = x^3 - 3x + 2$ tiene sus extremos relativos y su punto de inflexión y calcule las imágenes de g para esos valores.

Resolución

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = -1$; $g''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g''(1) = 6.1 = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo: $x = 1, y = g(1) = 1^3 - 3.1 + 2 = 0$, punto $M(1, 0)$

$g''(-1) = 6.(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo: $x = -1, y = g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$, punto $N(-1, 4)$

Para $x < 0$, $g''(x) < 0$ (g cóncava) y para $x > 0$, $g''(x) > 0$ (g convexa) $\Rightarrow$ punto de inflexión: $I(0, 2)$

2.- Los beneficios en miles de euros de una empresa, en función del tiempo, están dados por la función

$$b(t) = \{10 - t, si\ 0 \leq t < 6\ t^2 - 16t + 48, si\ t \geq 6$$

a) Estudie la continuidad de b(t).

Resolución

Para $t \neq 6$, b(t) es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $b'(t) = \{-1, si\ 0 \leq t < 6\ 2t - 16, si\ t > 6$

$b(t) = 10 - 6 = 4 \neq b(t) = 6^2 - 16.6 + 48 = -12 \Rightarrow$ b(t) NO es continua en $t = 6$ y, por tanto, tampoco es derivable.

Conclusión: b(t) es continua y derivable en $[0, +\infty) - \{6\}$

b) Describa razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

Resolución

$b'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 8$. Hagamos una tabla de signos de $b'(t)$

	$(0, 6)$	6	$(6, 8)$	8	$(8, +\infty)$
$b'(t)$	–	$\nexists$	–	0	+
b(t)	decreciente	decreciente	decreciente	mínimo	creciente

b(t) es decreciente en $(0, 8)$ y creciente en $(8, +\infty)$; mínimo: $t = 8$, $g(8) = 8^2 - 16.8 + 48 = -16$.

c) Halle el intervalo de tiempo en el que se producen las pérdidas. ¿En qué momento estas pérdidas son máximas?

Resolución

Como para $0 \leq t < 6$, $b(t) = 10 - t > 0$ n el intervalo (0, 6) hay beneficios.

Para $t \geq 6$, $b(t) = t^2 - 16t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{16 \pm 8}{2}$, $t = 12$, $t = 4$ (no válido pues $t \geq 6$) $\Rightarrow$ la gráfica de g

Para $t \geq 6$ es un trozo de parábola de vértice $V(8, -16)$ que corta al eje de abscisas en (12, 0).

Por tanto, se producen pérdidas en el intervalo de tiempo (6, 12) y las pérdidas son máximas para $t = 8$ siendo estas de 16000 €

3.- Dada la función f: $R \rightarrow R$ definida por $f(x) = \{x^2 - 1, si\ x \leq 1\ x^2 - ax + b, si\ x > 1$

a) Determine a y b sabiendo que f es continua en R y que la recta tangente en $x = 2$ es paralela al eje OX.

Resolución

Para x ≠ 1, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \{2x, si\ x < 1\ 2x - a, si\ x > 1$

Por ser continua en x = 1, $f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow 1^2 - 1 = 1^2 - a.1 + b \Rightarrow a - b = 1$.

Como la recta tangente en x = 2 es paralela al eje OX, entonces en x = 2 hay un extremo relativo y, por tanto, f´(2) = 0. Luego, 2.2 – a = 0, a = 4. Sustituyendo, 4 – b = 1, b = 3.

Conclusión: debe ser a = 4, b = 3.

b) Representa la gráfica de la función f para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Resolución

Como a = 4, b = 3, $f(x) = \{x^2 - 1, si\ x \leq 1\ x^2 - 4x + 3, si\ x > 1$;
$f'(x) = \{2x, si\ x < 1\ 2x - 4, si\ x > 1$; si x ≠ 1, f´´(x) = 2 > 0

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = -1$; $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2},\ x = 1,\ x = 3$

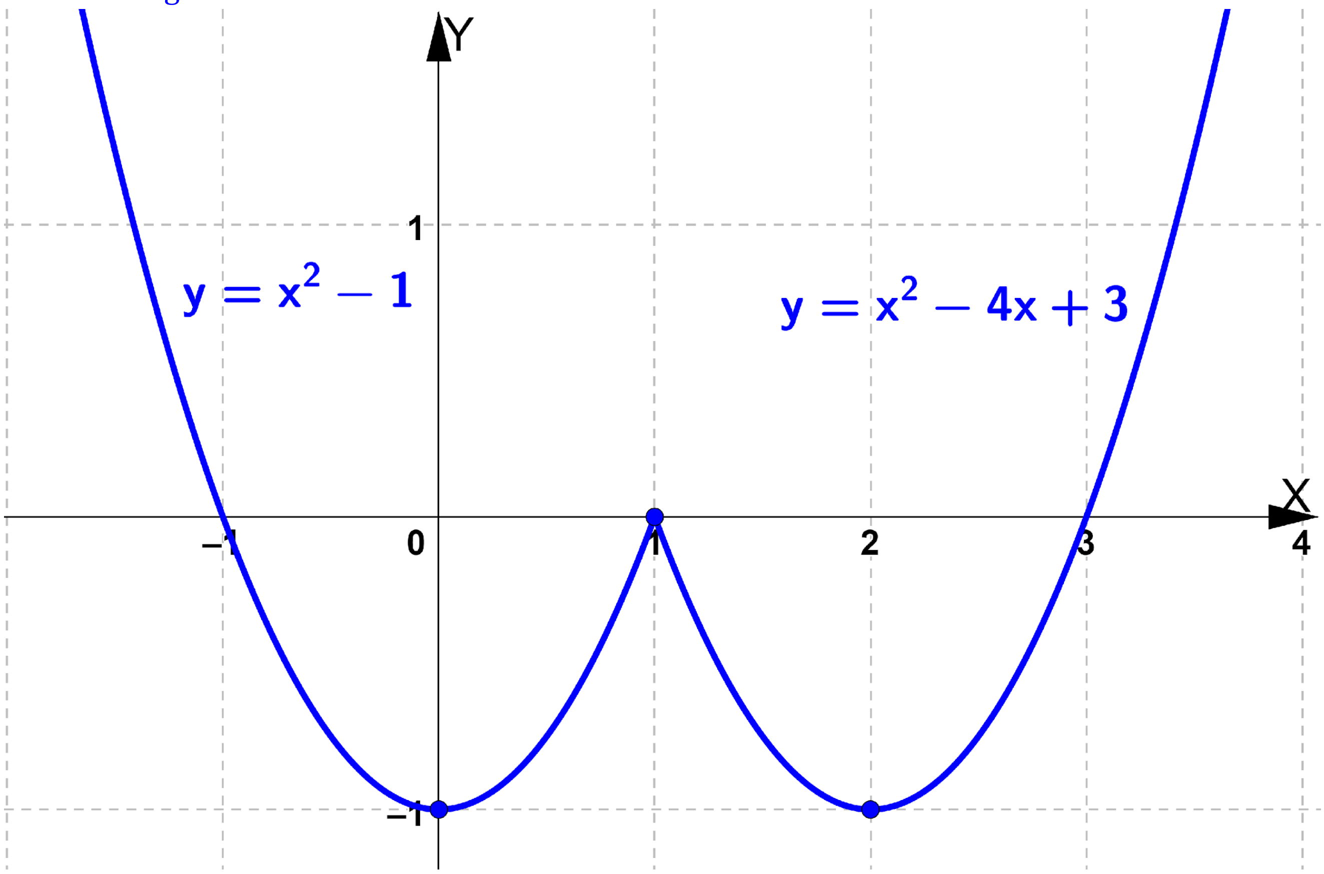
Los trozos de parábola cortan al eje X en (–1, 0), (1, 0) y (3, 0)

f´(x) = 0 ⇔ x = 0 ó x = 2

x = 0, y = f(0) = 0^2 – 1 = –1, punto (0, –1) ; x = 2, y = f(2) = 2^2 – 4.2 + 3 = –1, punto (2, –1)

Los vértices (mínimos) de los dos trozos de parábola son (0, –1) y (2, –1), respectivamente

Un esbozo de la gráfica sería:



c) Halle $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx$

Resolución

Una primitiva del integrando es $p(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{3}$

Por la regla de Barrow,

$$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx = p(3) - p(1) = \frac{3^3 - 6.3^2 + 9.3}{3} - \frac{1^3 - 6.1^2 + 9.1}{3} = \frac{-4}{3} \cong -1,33$$

4.-

a) Sea la función f: R → R definida por $f(x) = \frac{ax^2 + b}{5}$. Calcule a y b sabiendo que f(0) = 1 y que $\int_0^5 f(x)\,dx = 30$.

Resolución

Como f(0) = 1, $\frac{a.0^2 + b}{5} = 1$, b = 5 y queda $f(x) = \frac{ax^2 + 5}{5}$.

Por otra parte, una primitiva de f es $F(x) = \frac{a\frac{x^3}{3} + 5x}{5} - 2x^2 + 3x = \frac{ax^3 + 15x}{15}$. Usando la regla de Barrow, $30 = \int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0) = \frac{a5^3 + 15.5}{15} - \frac{a0^3 + 15.0}{15} = \frac{125a + 75}{15} = \frac{25a + 15}{3}$

Luego, 25a + 15 = 90 ⇒ 25a = 75 ⇒ a = 3 y $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{5}$

b) Sea la función $g(x) = -2x^2 + 3x - 5$. Determine el intervalo o intervalos de crecimiento y sus extremos, en caso de existir.

Resolución

g´(x) = 0 ⇔ –4x + 3 = 0 ⇔ $x = \frac{3}{4}$. Hagamos una tabla de signos de g´(x)

	$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
g´(x)	+	+	–
g(x)	creciente	máximo	decreciente

g es creciente en $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Máximo relativo: $x = \frac{3}{4}$, $y = g\left(\frac{3}{4}\right) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\frac{3}{4} - 5 = \frac{-31}{8}$, punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-31}{8}\right)$. No hay mínimo

5.- Sea la función $f(x) = x^2 + ax + 3$ con x ∈ R.
a) Determine el valor de a para que la gráfica de f tenga una tangente en el punto de abscisa x = 1 que sea paralela a la recta 2x + y = 0.

Resolución

$f(x) = x^2 + ax + 3$ f´(x) = 2x + a

La recta es y = –2x, que tiene pendiente –2. Al ser la recta tangente en x = 1 paralela a la recta y = –2x,

f´(1) = –2 ⇒ 2.1 + a = 0 ⇒ a = –2 y. Luego, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) Para a = 0 calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) y $g(x) = -x^2 + 2x + 7$.

Resolución

Para a = 0, $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 7$. Hallamos los puntos de corte entre las parábolas:

$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 2x + 7 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3 = -x^2 + 2x + 7 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 0$.

$x = \frac{1 \pm 3}{2}$, $x = -1$, $x = 2$. El área comprendida entre las gráficas es $A = \left| \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx \right|$

$\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx$. Una primitiva es $p(x) = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{3}$.

Por Barrow,

$\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = p(2) - p(-1) = \frac{2.2^3 - 3.2^2 - 12.2}{3} - \frac{2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1)}{3} = \frac{-27}{3} = -9$

Luego, el área que se pide es $A = |-9| = 9\ u^2$

6.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\, x, & si\ x < 0 \\ x^2 + a, & si\ 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{b}, & si\ x > 2 \end{cases}$ a, b ∈ R

a) Halle los valores de a y b para que la función f sea continua en todo R.

Resolución

Para x ≠ 0, x ≠ 2, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$f'(x) = \begin{cases} cos\, x, & si\ x < 0 \\ 2x, & si\ 0 < x < 2 \\ \frac{1}{b}, & si\ x > 2 \end{cases}$

Por ser continua en x = 0, $f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow sen\, 0 = 0^2 + a \Rightarrow a = 0$.

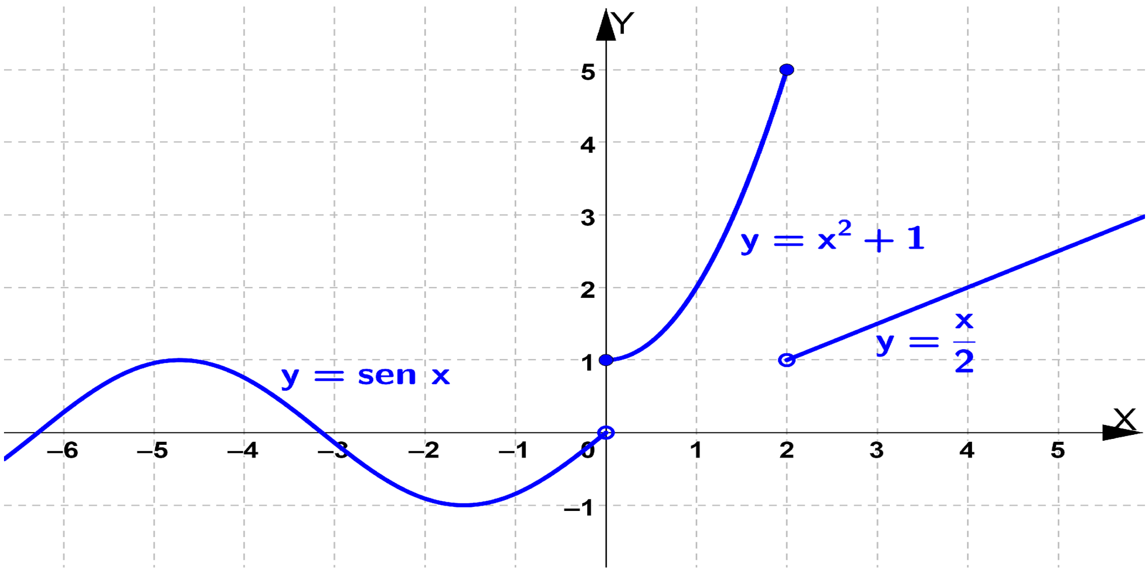
Por ser continua en x = 2, $f(x) = f(x) = f(2) \Rightarrow 2^2 + 0 = \frac{2}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Conclusión: debe ser $a = 0,\ \ b = \frac{1}{2}$

b) Represente la función f correspondiente a los valores a = 1 y b = 2.

Resolución

Para a = 1, b = 2, $f(x) = \begin{cases} sen\, x, & si\ x < 0 \\ x^2 + 1, & si\ 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{2}, & si\ x > 2 \end{cases}$



7.- Sea la función f: R → R definida por $f(x) = \begin{cases} -1, & si\ x \le -2 \\ \frac{x}{2}, & si\ -2 < x \le 1 \\ ax^2, & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de f según los valores de a.
b) Determine la función derivada de f para a = 1.

Resolución

Para x ≠ –2, x ≠ 1, f es continua y derivable independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo

$f'(x) = \{0, si\ x <- 2\ \frac{1}{2}, si\ \ - 2 < x < 1\ 2ax, si\ x > 1$

$f(x)\ = f(x)\ = f(- 2) \Rightarrow - 1 = \frac{-2}{2}$ ⇒ f es continua en x = –2

$f(x)\ = f(x)\ = f(1) \Rightarrow \frac{1}{2} = a. 1^2$ ⇒ f sólo es continua en x = 1 si $a\ = \frac{1}{2}$.

Conclusión: f es continua en R – {1} y sólo es continua en x = 1 si $a\ = \frac{1}{2}$

Para a = 1, si x ≠ –2, x ≠ 1, $f'(x) = \{0, si\ x <- 2\ \frac{1}{2}, si\ \ - 2 < x < 1\ 2x, si\ x > 1$.

$f'(x)\ \ = 0\ \neq f'(x)\ \ = \frac{1}{2}$ ⇒ f NO es derivable en x = –2.

Sabemos que para a = 1 f NO es continua en x = 1 ⇒ f NO es derivable en x = 1.

Conclusión: f sólo es derivable en R – {–2 ; 1} con
$f'(x) = \{0, si\ x <- 2\ \frac{1}{2}, si\ \ - 2 < x < 1\ 2x, si\ x > 1$

c) Calcule $\int_{-3}^{1/2} f(x)\, dx$

Resolución

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

$$I\ = \int_{-3}^{1/2} f(x)\, dx = \int_{-3}^{-2} f(x)\, dx + \int_{-2}^{1/2} f(x)\, dx = \overbrace{\int_{-3}^{-2} (- 1)\, dx}^{I_1}\ + \overbrace{\int_{-2}^{1/2} \frac{x}{2}\, dx}^{I_2}$$

Para I_1, una primitiva de la función a integrar es $p(x) =- x$.

Por la regla de Barrow, $I_1 = p(- 2) - p(- 3) =- (- 2) - [- (- 3)] =- 1$

Para I_2, una primitiva de la función a integrar es $q(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$.

Por la regla de Barrow, $I_2 = q\left(\frac{1}{2}\right) - q(- 2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{(-2)^2}{4} = \frac{-15}{16}$.

Luego, $I\ = I_1 + I_2 =- 1\ - \frac{15}{16} = \frac{-31}{16}$

8.- Sea la función f: R → R definida por $f(x) = \{\frac{6}{x}, si\ x <- 1\ x^2 + 7x, si\ \ - 1 \leq x \leq 1\ \frac{8}{x}, si\ x > 1$

a) Represente gráficamente la función f.
b) Calcule las asíntotas de la función f.

Resolución

Para x ≠ –1, x ≠ 1, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \{\frac{-6}{x^2}, si\ x <- 1\ 2x + 7, si\ \ - 1 < x < 1\ \frac{-8}{x^2}, si\ x > 1$

$f(x) = \frac{6}{-1} = -6 = f(x) = f(-1) = (-1)^2 + 7(-1) = -6 \Rightarrow$ f es continua en x = –1

$f'(x) = \frac{-6}{(-1)^2} = -6 \neq f'(x) = 2(-1) + 7 = 5 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = –1.

$f(x) = f(1) = 1^2 + 7.1 = 8 = f(x) = \frac{8}{1} = 8 \Rightarrow$ f es continua en x = 1

$f'(x) = 2.1 + 7 = 9 \neq f'(x) = \frac{-8}{1^2} = -8 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 2.

Conclusión: f es continua en R y derivable en R – {–1 ; 1}

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x = x(x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -7$. Pero como $-1 \leq x \leq 1$, resulta que la gráfica de f sólo corta al eje X en (0, 0)

Para $x < -1$, $f'(x) = \frac{-6}{x^2} < 0$ (f decreciente) y para $x > 1$, $f'(x) = \frac{-8}{x^2} < 0$ (f decreciente).

Para $-1 < x < 1$, $f'(x) = 2x + 7 > 0$ (f creciente)

Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1, +\infty)$
f´(x)	–	$\nexists$	+	$\nexists$	–
f(x)	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

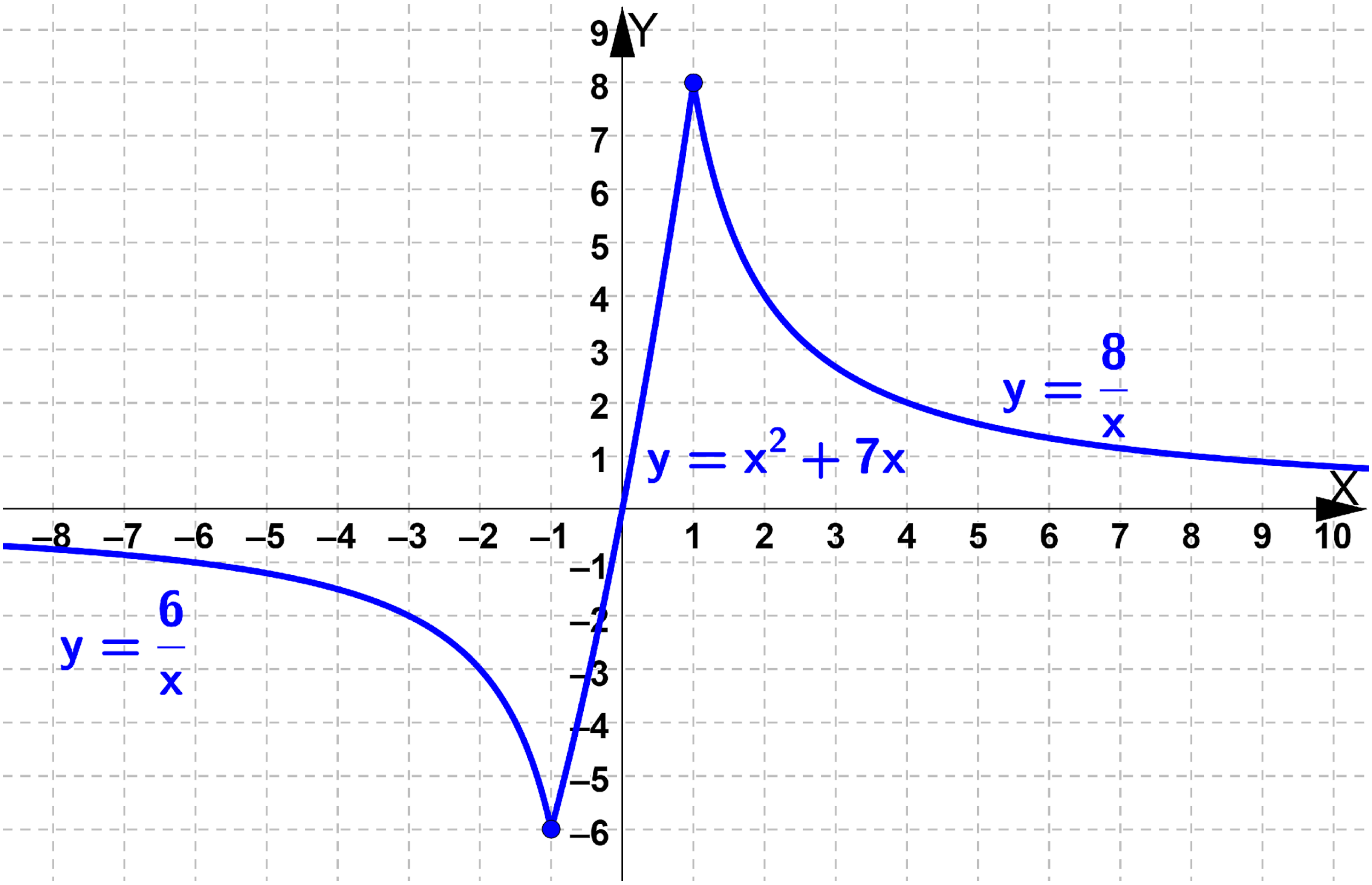
f es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$

Mínimo relativo: x = –1, $y = f(-1) = -6$, punto $(-1, -6)$

Máximo relativo: x = 1, $y = f(1) = 8$, punto $(1, 8)$

Como f es continua en su dominio, no hay asíntotas verticales.

Por otra parte, $f(x) = 0$. Luego, la asíntota horizontal en $\pm\infty$ es el eje X.
Teniendo en cuenta además que la gráfica de f está formada por un trozo de la hipérbola $y = \frac{6}{x}$, un trozo
de parábola y otro trozo de la hipérbola $y = \frac{8}{x}$, un esbozo de su gráfica es:



c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Resolución

$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, si\ x < -1 \\ x^2 + 7x, si\ -1 \le x \le 1 \\ \frac{8}{x}, si\ x > 1 \end{cases}$,

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-6}{x^2}, si\ x < -1 \\ 2x + 7, si\ -1 < x < 1 \\ \frac{-8}{x^2}, si\ x > 1 \end{cases}$

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$x_0 = 2 \quad ; \quad f'(x_0) = f'(2) = \frac{-8}{2^2} = -2 \quad ; \quad f(x_0) = f(2) = \frac{8}{2} = 4 \quad ;$$

$$\text{rtg: } y = -2(x - 2) + 4 \Rightarrow \text{rtg: } y = -2x + 8$$

9.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12, si\ x < -3 \\ -x + 3, si\ -3 \le x \le 2 \\ x - 1, si\ x > 2 \end{cases}$

a) Determine los valores de x donde f es derivable.

Resolución

Para $x \neq -3$, $x \neq 2$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 4x, si\ x < -3 \\ -1, si\ -3 < x < 2 \\ 1, si\ x > 2 \end{cases}$

$f(x) = 2(-3)^2 - 12 = 6 = f(x) = f(-3) = -(-3) + 3 = 6 \Rightarrow$ f es continua en x = –3

$f'(x) = 4(-3) = 12 \neq f'(x) = -1 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = –3.

$f(x) = f(2) = -2 + 3 = 1 = f(x) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ f es continua en x = 2

$f'(x) = -1 \neq f'(x) = 1 \Rightarrow$ f NO es derivable en x = 2.

Conclusión: f es continua en R y derivable en R – {–3 ; 2}

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Calcule los valores de x donde f alcanza los extremos locales.

Resolución

f´(x) ≠ 0 porque, para x < –3, f´(x) = 4x > 0. Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty, -$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f´(x)	+	∄	–	∄	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-3, 2)$

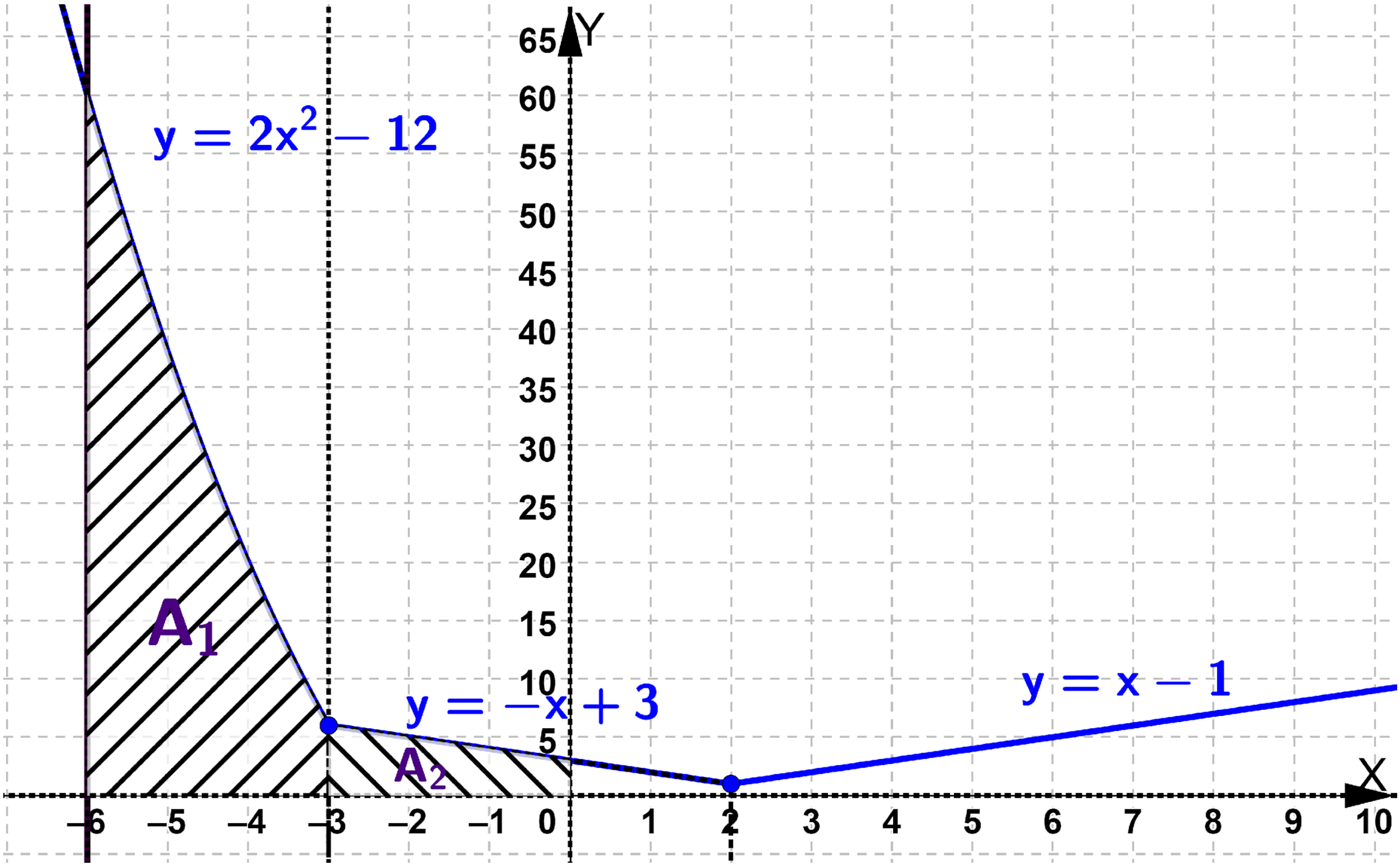
Máximo relativo: x = –3, y = f(–3) = 6, punto (–3, 6).

Mínimo relativo: x = 2, $y = f(2) = 1$, punto (2, 1)

d) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = –6 y x = 0.

Resolución

Usando los apartados anteriores, que x = –6 es la vertical que pasa por (–6, 0),
que f(–6) = $2(-6)^2 - 12 = 60$ y que x = 0 es el eje Y, un esbozo del recinto sería



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-6}^{-3} (2x^2 - 12)\, dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{2x^3}{3} - 12x = \frac{2x^3 - 36x}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A_1 = p(-3) - p(-6) = \frac{2(-3)^3 - 36(-3)}{3} - \frac{2(-6)^3 - 36(-6)}{3} = \frac{54}{3} - \frac{-216}{3} = \frac{270}{3} = 90$$

$A_2 = \int_{-3}^{0} (-x + 3)\, dx$. Una primitiva de la función integrando es $q(x) = \frac{-x^2}{2} + 3x = \frac{6x - x^2}{2}$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = q(0) - q(-3) = \frac{6.0 - 0^2}{2} - \frac{6(-3) - (-3)^2}{2} = \frac{27}{2}$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 = 90 + \frac{27}{2} = \frac{207}{2} = 103,5\ u^2$

10.-

a) Represente gráficamente las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = 2x$ sombreando el recinto limitado por sus gráficas.

b) Calcule el área de dicho recinto.

Resolución

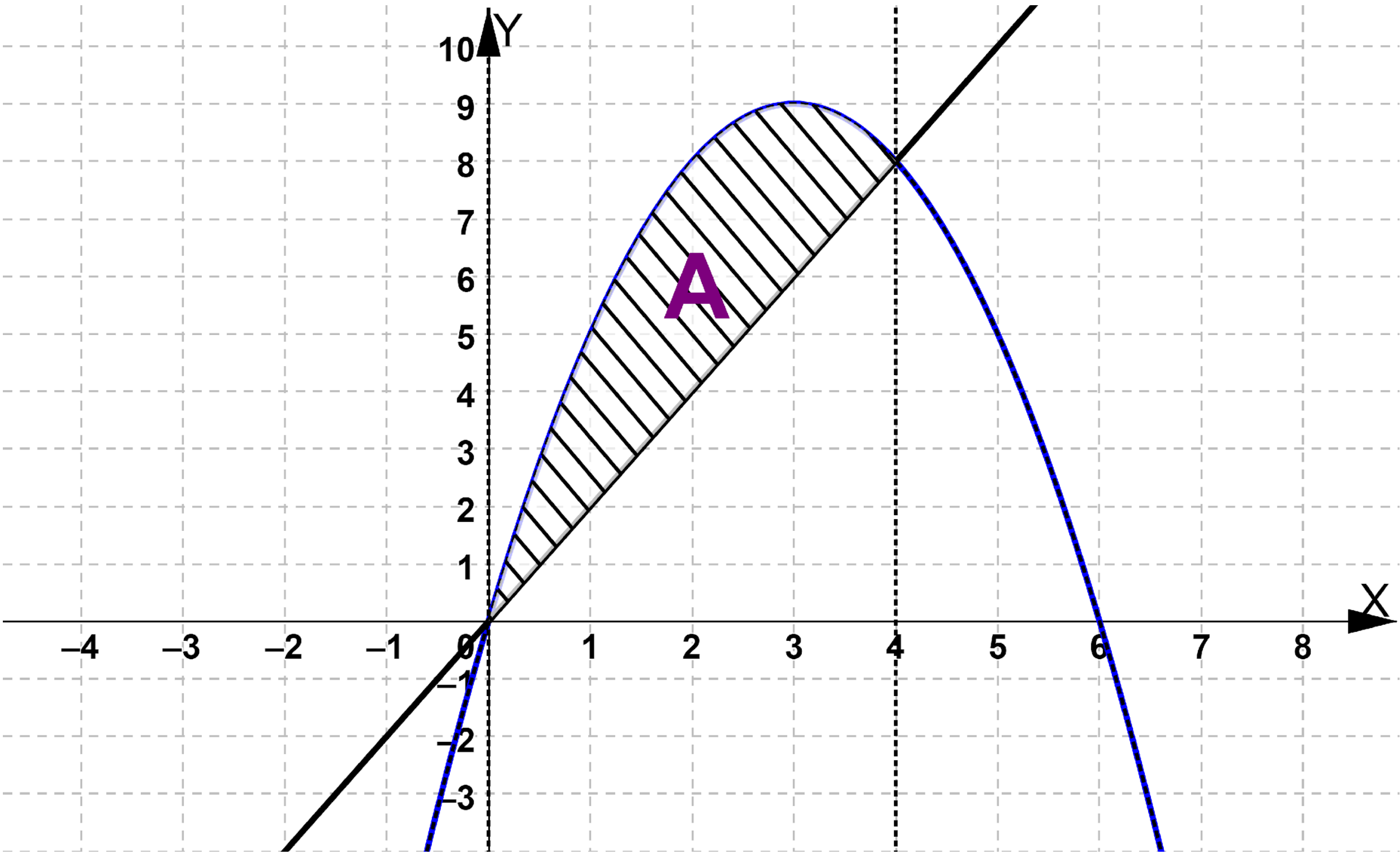
Como $f(x) = 6x - x^2 = x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 6$ y $f'(x) = 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $y = f(3) = 6.3 - 3^2 = 9$, la gráfica de f es una parábola cóncava de vértice (máximo) V(3, 9) que corta al eje X en (0, 0) y (6, 0).

La gráfica de g es la recta y = 2x, función lineal creciente que pasa por (0, 0)

Los cortes de las gráficas de f se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 6x - x^2 = 2x$

$4x - x^2 = x(4 - x) = 0$, $x = 0$; $y = 0$, $x = 4$, $y = 2.4 = 8$. Los puntos de corte son (0, 0) y (4, 8)

Un esbozo del recinto mencionado es



El área que se pide es $A = \int_0^4 (6x - x^2 - 2x)\, dx = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$.

Una primitiva de la función integrando es $p(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{6x^2 - x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(4) - p(0) = \frac{6.4^2 - 4^3}{3} - \frac{6.0^2 - 0^3}{3} = \frac{32}{3} \cong 10,67\ u^2$

11.- Siendo f: R → R la función definida por la expresión $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & si\ x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Determine si f es continua en x = 1.
b) Estudie la derivabilidad de f en x = 1 y calcule la función derivada de f.

Resolución

Para x ≠ 1, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

siendo $f'(x) = \{- 2x, si\ x < 1\ \frac{-2}{x^2}, si\ x > 1$

$f(x) = f(1) = 3 - 1^2 = 2 = f(x) = \frac{2}{1} = 2$ ⇒ f es continua en x = 1

$f'(x) =- 2.1 =- 2 = f'(x) = \frac{-2}{1^2} =- 2$ ⇒ f es derivable en x = 1.

Luego, f es continua y derivable en R siendo $f'(x) = \{- 2x, si\ x \leq 1\ \frac{-2}{x^2}, si\ x > 1$

c) Halle el área comprendida entre la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = e^3.

Resolución

f´(x) = 0 ⇔ –2x = 0 ⇔ x = 0 porque, para x > 1, $f'(x) = \frac{-2}{x^2} < 0$.

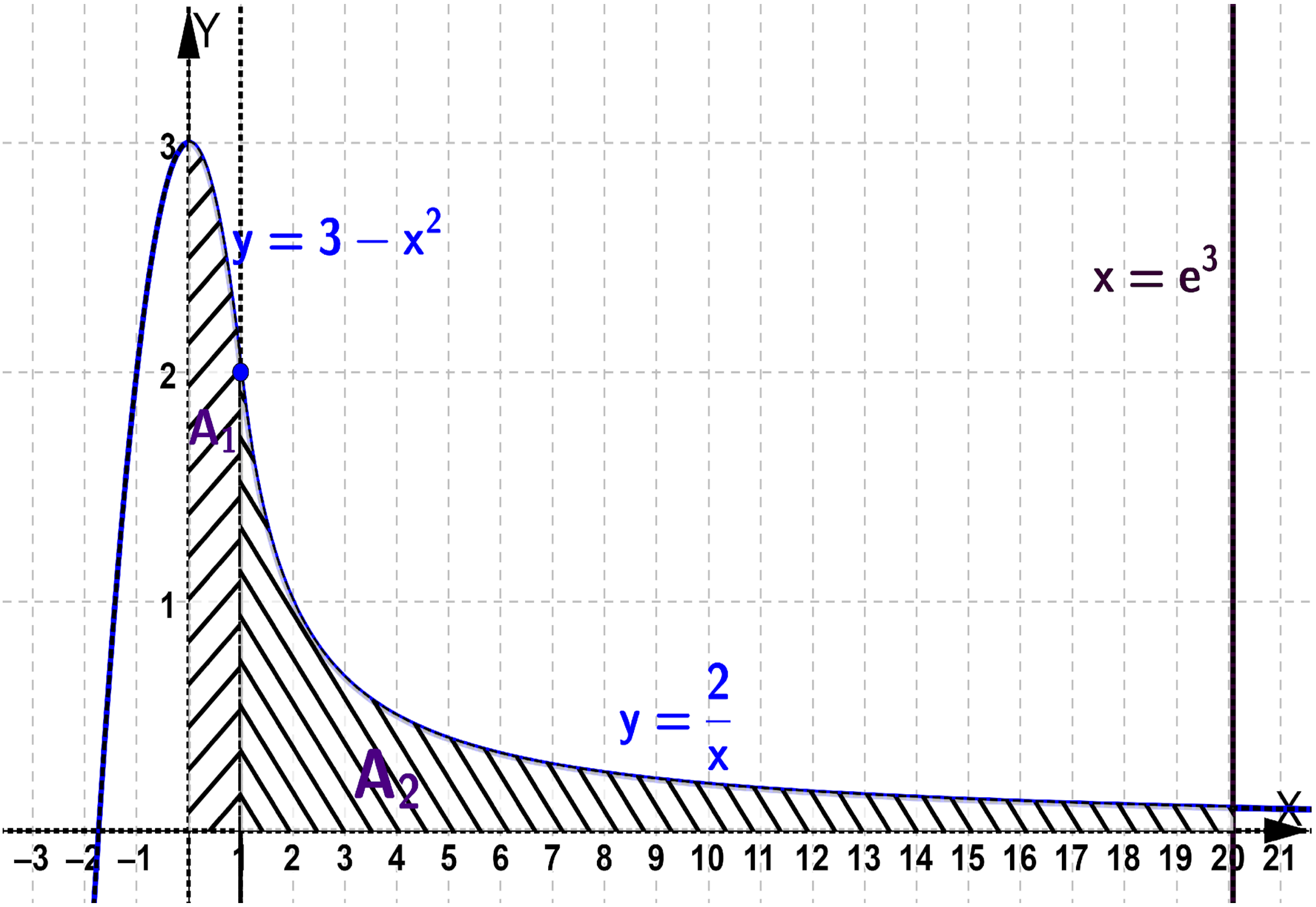
Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f´(x)	+	0	–	–2	–
f(x)	creciente	máximo	decreciente	decreciente	decreciente

Máximo relativo: x = 0, y = f(0) = 3 – 0^2 = 3, punto (0, 3).

Además, la gráfica de f está formada por un trozo de parábola y por un trozo de la hipérbola $y = \frac{2}{x}$

Usando los apartados anteriores, que x = e^3 ≅ 20 es la vertical que pasa por (e^3, 0), que $f\left(e^3\right) = \frac{2}{e^3} \cong 0,1$, que el eje de abscisas es el eje X y que x = 0 es el eje Y, un esbozo del recinto cuya área se pide sería



El área que se pide es $A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^1 (3 - x^2)\, dx$. Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = 3x - \frac{x^3}{3} = \frac{9x - x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A_1 = p(1) - p(0) = \frac{9.1 - 1^3}{3} - \frac{9.0 - 0^3}{3} = \frac{8}{3}$

$A_2 = \int_1^{e^3} \frac{2}{x}\, dx$. Una primitiva de la función integrando es $q(x) = 2\, ln|x|$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = q\left(e^3\right) - q(1) = 2 \ln ln\, e^3 - 2 \ln ln\, 1 = 6$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3} \cong 8,67\, u^2$

12.- Sea la función $f(x) = x^2 + |x|$, $x \in R$.
a) Halla la representación gráfica de la función f.
b) Calcule el área de la región del plano delimitada por el eje de abscisas, la función f, y las rectas de ecuaciones $x = -3$ y $x = 0$.

Resolución

Usando la definición del valor absoluto, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & si\ x < 0 \\ x^2 + x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Si $x \neq 0$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables siendo $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & si\ x < 0 \\ 2x + 1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$

f es continua en $x = 0$ por ser suma de funciones continuas en $x = 0$ (la función x^2 y la función valor absoluto)

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2.0 - 1 = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2.0 + 1 = 1$. Luego, f NO es derivable en $x = 0$

$f'(x) \neq 0$ porque, para $x < 0$, $f'(x) = 2x - 1 < 0$ y para $x > 0$, $f'(x) = 2x + 1 > 0$

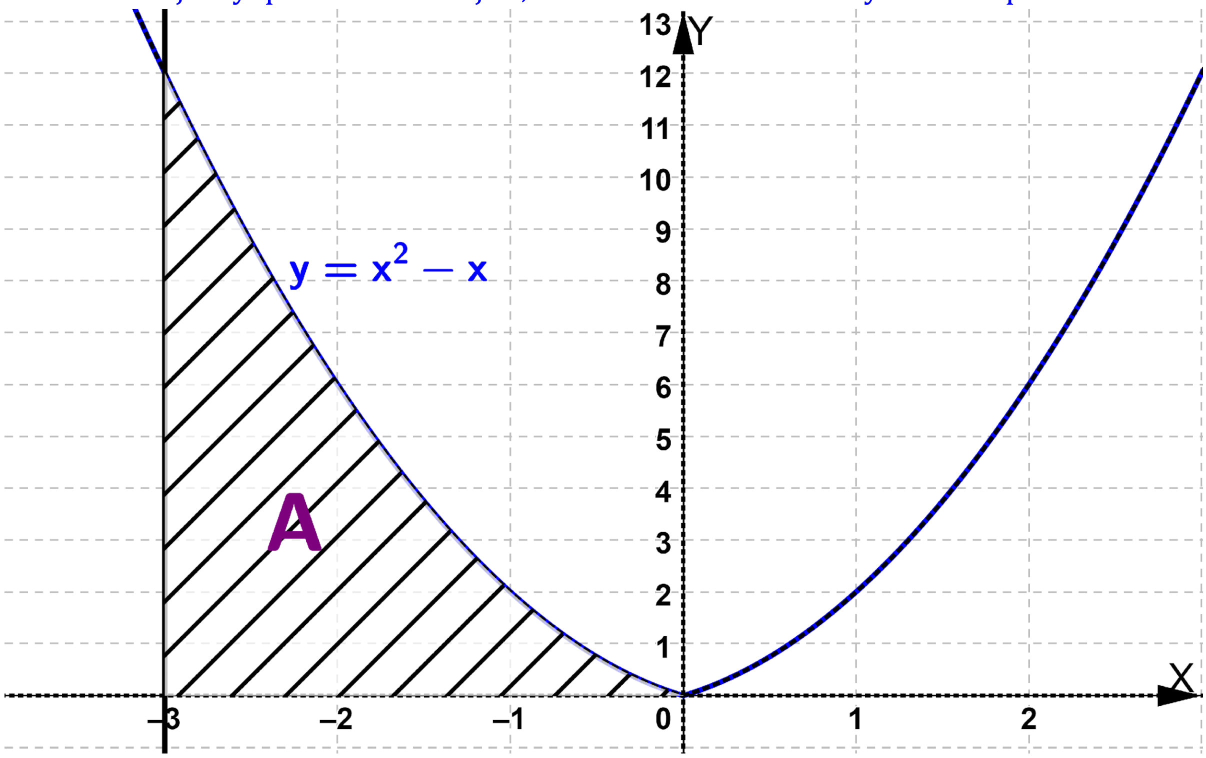
Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

Mínimo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = 0^2 + |0| = 0$, punto $(0, 0)$.

Además, la gráfica de f está formada por dos trozos de parábola

Usando también que $x = -3$ es la vertical que pasa por $(-3, 0)$, que $f(-3) = (-3)^2 + |-3| = 12$, que el eje de abscisas es el eje X y que $x = 0$ es el eje Y, un esbozo del recinto cuya área se pide sería



El área que se pide es $A = \int_{-3}^{0} (x^2 - x)\, dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(0) - p(-3) = \frac{2.0^3 - 3.0^2}{6} - \frac{2(-3)^3 - 3(-3)^2}{6} = \frac{81}{6} = \frac{27}{2} = 13,5\ u^2$