Relaciones y funciones

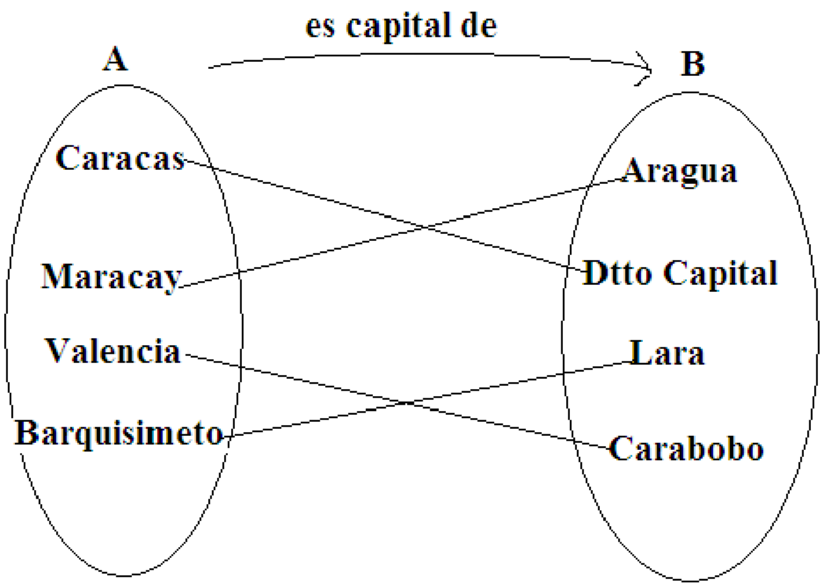
Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

Relaciones

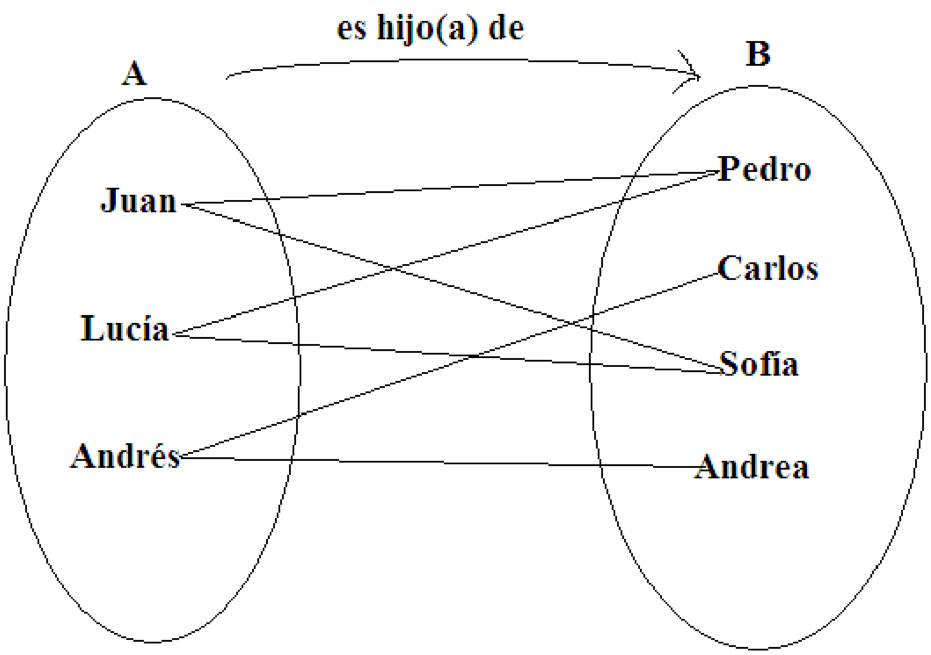
En matemática es habitual asociar números o conjuntos de números con otros números o conjuntos, a tal asociación se le denomina relaciones, por ejemplo, en primaria se trabajó bastante con las relaciones de orden mayor que >, menor que <, etc. Ahora bien hay otro tipo de relaciones que son relaciones entre conjuntos bastante sencillas las cuales suelen representarse por un diagrama conocido como diagrama de Venn, aquí el concepto de conjunto hace referencia a una colección de elementos caracterizados por una propiedad bien definida, no objeto de este curso estudiar una teoría axiomática de conjuntos por tanto trateros solo conjuntos numéricos sencillos relacionados con los ya conocidos por el estudiante, a continuación vamos a examinar un ejemplo concreto para tener una idea más clara de esto.

Ejemplo: sea A el conjunto de las ciudades {Caracas, Maracay, Valencia, Barquisimeto} y sea B el conjunto de los estados {Aragua, Distrito Capital, Lara, Carabobo} y sea la relación ***es capital de***, representar la relación entre ambos conjuntos por un diagrama de Venn

Para realizar este ejercicio dibujamos dos óvalos que representarán el conjunto A y el conjunto B y la relación la representaremos con líneas que en enlacen un elemento del conjunto A con un elemento del conjunto B



Otro de ejemplo de relaciones sería el conjunto A dado por {Juan, Lucia, Andrés} y el conjunto B dado por {Pedro, Sofía, Carlos, Andrea} y las relaciones Juan y Lucía son hijos de Pedro y Sofía, y Andrés es hijo de Carlos y Andrea en diagrama de Venn esto quedaría así



Funciones

Ahora bien, existen otro tiempo de relaciones en matemática sumamente importantes conocidas como funciones y a continuación damos el concepto matemático de la misma.

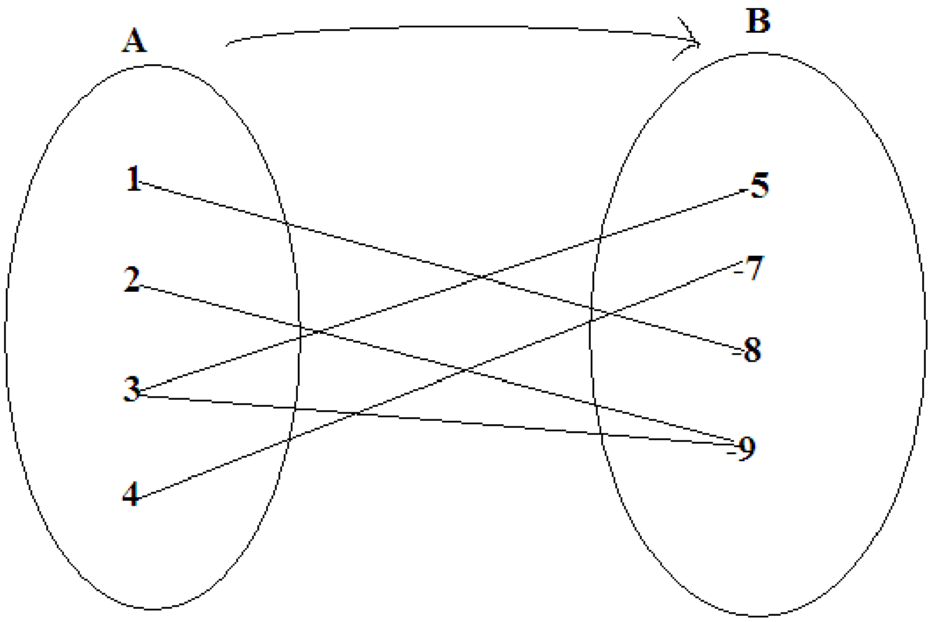
Dados dos conjuntos no vacíos A y B y una relación definida entre ellos, dicha relación es una función si y solo si a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y solo un elemento del conjunto B.

Una vez establecido este concepto se tiene además la siguiente caracterización de la función en sí: el conjunto A por lo general se denomina conjunto de partida o dominio y el conjunto B de se denomina conjunto de llegada o rango; a los elementos relacionados con los del conjunto A se les llama imágenes, y a los elementos relacionados con los del conjunto B se les llama contra imágenes, a las funciones se les designa simbólicamente por $f(x)$ y a veces para indicar que está definida sobre un dominio A con rango en B se usa la notación $f: A \rightarrow B$ y su definición viene dada por $y=f(x)$ en donde y se denomina la variable dependiente y a x se le denomina la variable independiente, el porqué de dichas denominaciones lo estudiaremos en a lo largo de este curso en el segundo momento del período académico.

Aunque esta definición de función es sumamente sencilla e intuitiva será suficiente para el desarrollo al nivel de este curso de 2do año.

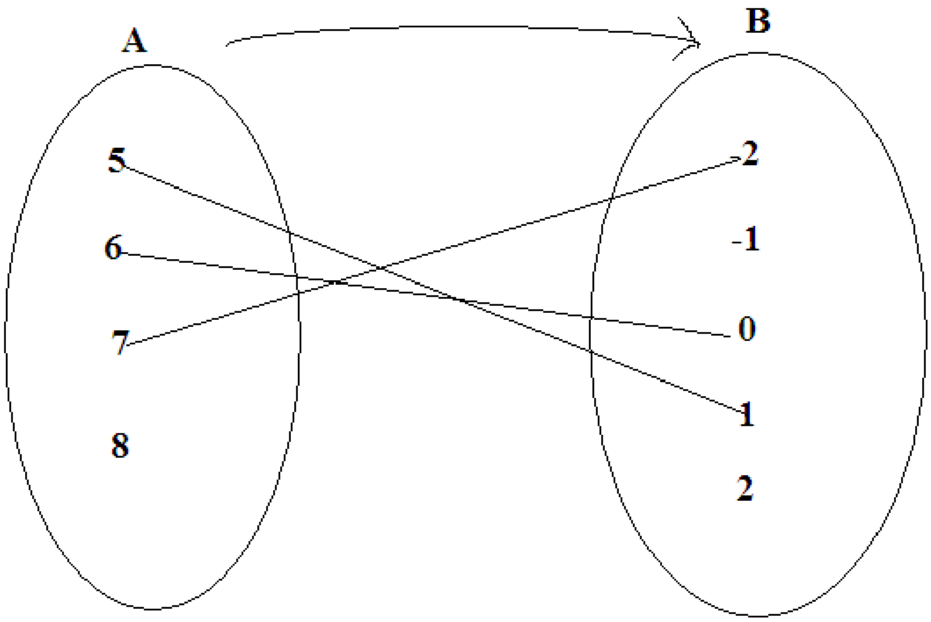
Pasemos a ver unos ejemplos de relaciones que son funciones y de las que no lo son

Ejemplo 1



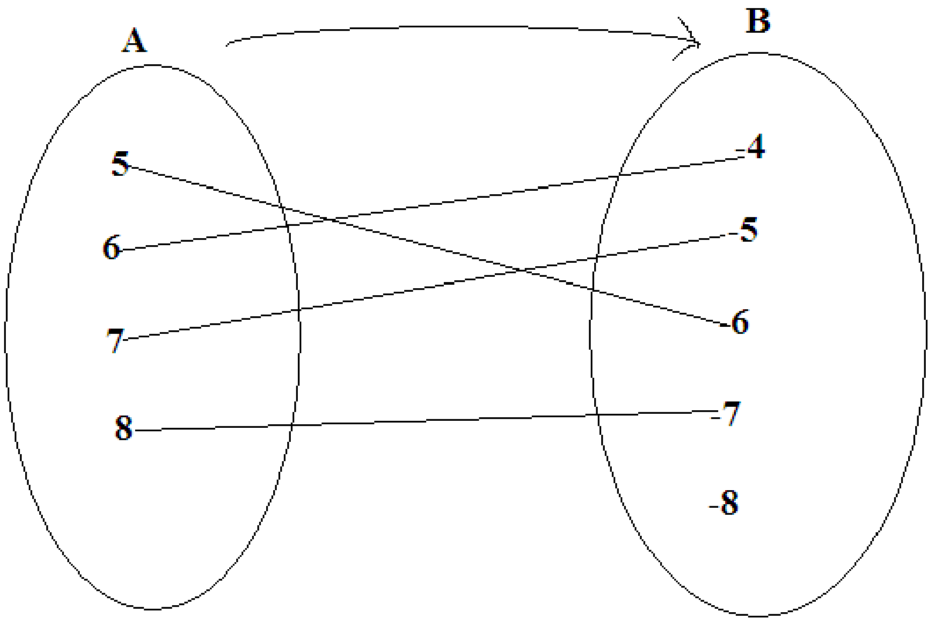
En este ejemplo vemos que en el dominio o conjunto A hay un elemento que tiene más de una imagen que es el 3 pues tiene como imágenes en el conjunto B a los número -5 y -9, por lo tanto, dicha relación no es función.

Ejemplo 2



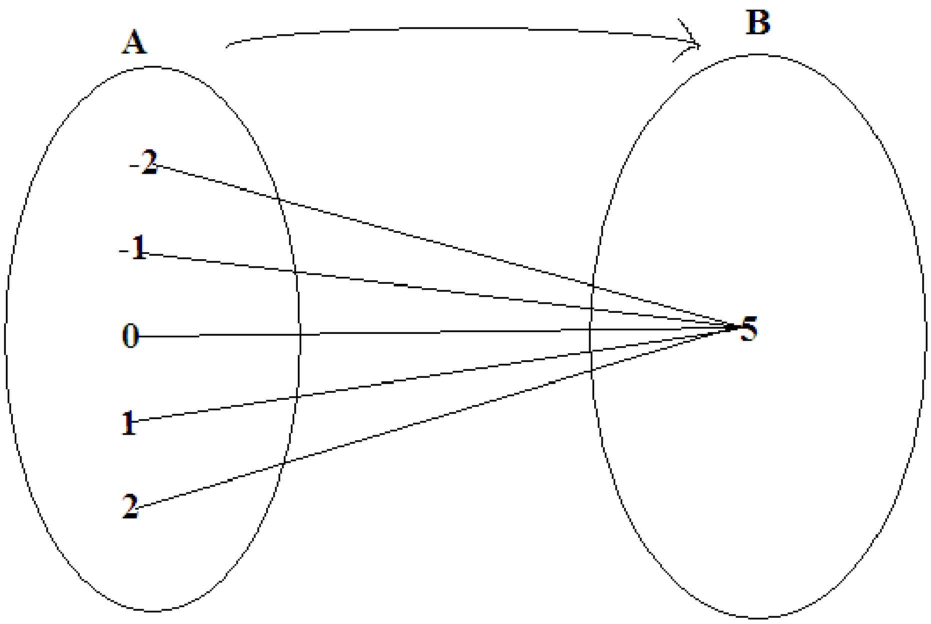
En este ejemplo se observa que un elemento del conjunto de partida o conjunto A no tiene una imagen correspondiente en el conjunto de llegada o conjunto B, ese elemento es el número 8 y por lo tanto no cumple con el concepto de función y dicha relación no es función.

Ejemplo 3



En este ejemplo se observa que cada elemento del conjunto A tiene una y solo una imagen en el conjunto B por lo tanto cumple con el concepto de función.

Ejemplo 4



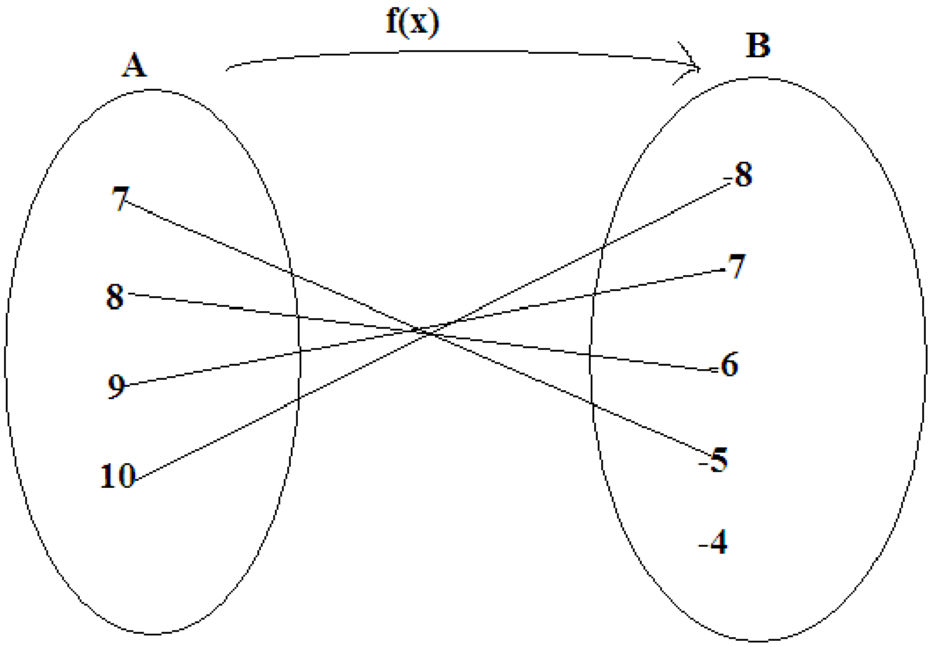
En este último ejemplo se observa que cada elemento del conjunto A tiene una y solo una imagen en el rango o conjunto B y por lo tanto cumple con el concepto de función.

<u>Tipos de funciones</u>

Las funciones matemáticas como las que hemos visto hasta ahora tienen su clasificación según sus respectivas características, y dicha clasificación o categorías de funciones viene dada por las siguientes denominaciones: función inyectiva, función sobreyectiva, función biyectiva, función en, a continuación, veremos el concepto con su respectivo ejemplo de cada una de ellas.

Función inyectiva: una función se dice que es inyectiva si cada elemento del dominio le corresponde una y sólo una imagen diferente el rango o conjunto de llegada.

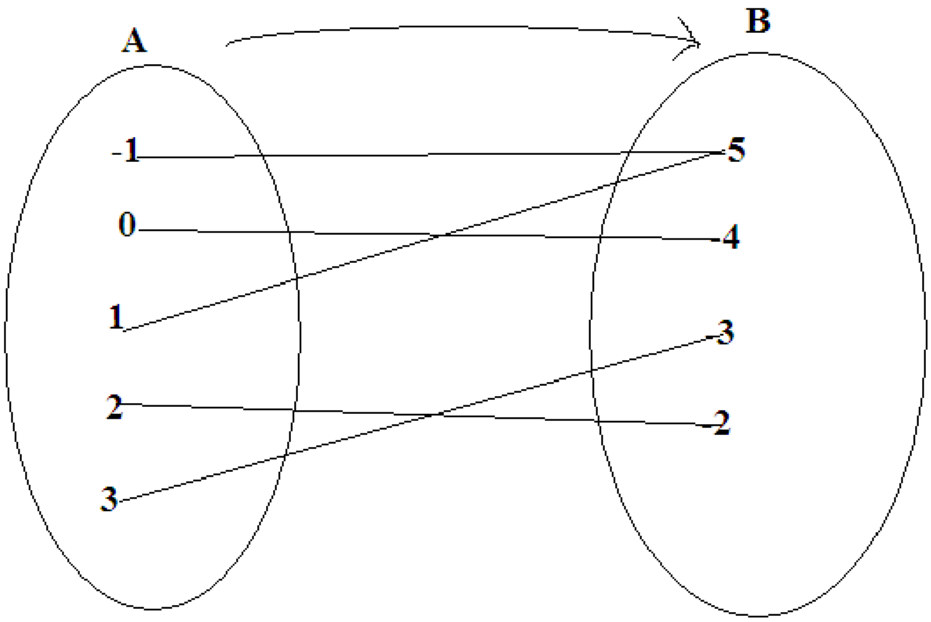
Ejemplo



En este ejemplo se observa que a cada elemento del dominio o conjunto A le corresponde una y sólo una imagen en el conjunto B, por lo tanto dicha función es inyectiva.

Función sobreyectiva: una función se dice que es sobreyectiva si cada elemento del rango o conjunto de llegada (conjunto B) le corresponde al menos una contra imagen en el conjunto A, en algunas ocasiones esto se resume diciendo que el rango es igual al conjunto de llegada.

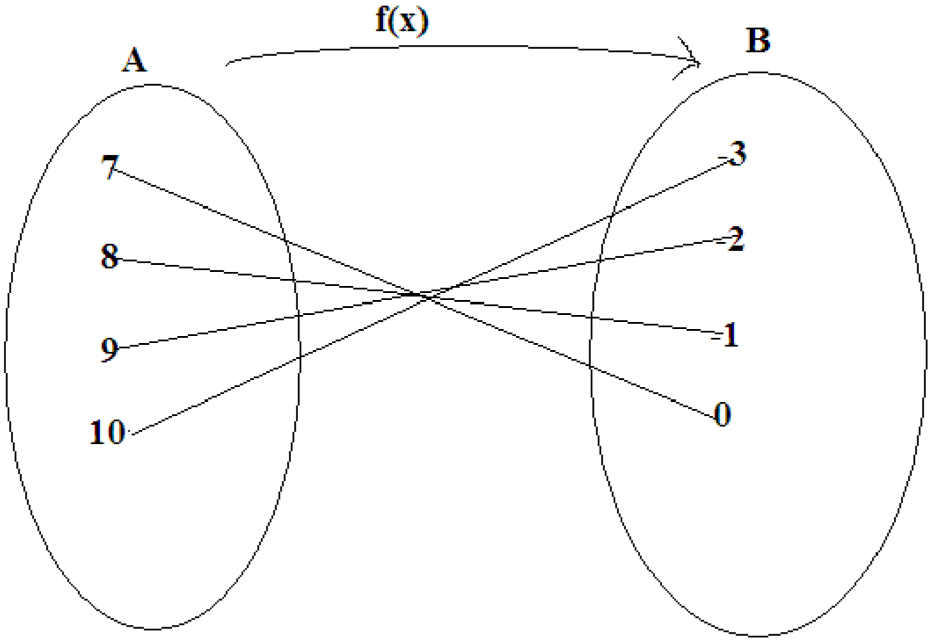
Ejemplo



En este ejemplo se observa que cada elemento del conjunto B tiene su respectiva contra imagen en el conjunto A, inclusive el -5 que tiene 2 contra imágenes en el conjunto A, por lo tanto, esta función es sobreyectiva.

Función biyectiva: una función se dice biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

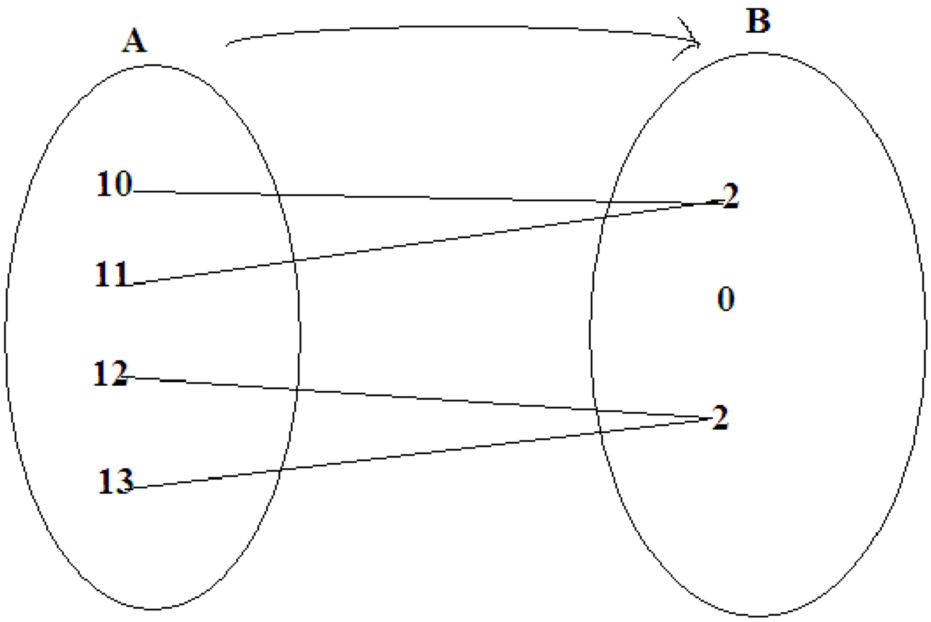
Ejemplo



En este ejemplo se observa que cada elemento del dominio o conjunto A tiene una y sólo una imagen diferente en el conjunto B por lo tanto es inyectiva, por otro lado, se observa también que cada elemento del conjunto B o rango tiene al menos una contra imagen el conjunto A por lo tanto es sobreyectiva, como esta función es inyectiva y al mismo tiempo es también sobreyectiva entonces se concluye diciendo que dicha función es biyectiva.

Función En: una función de se dice que es función En cuando no es ni inyectiva ni sobreyectiva, pero de igual modo sigue siendo una función.

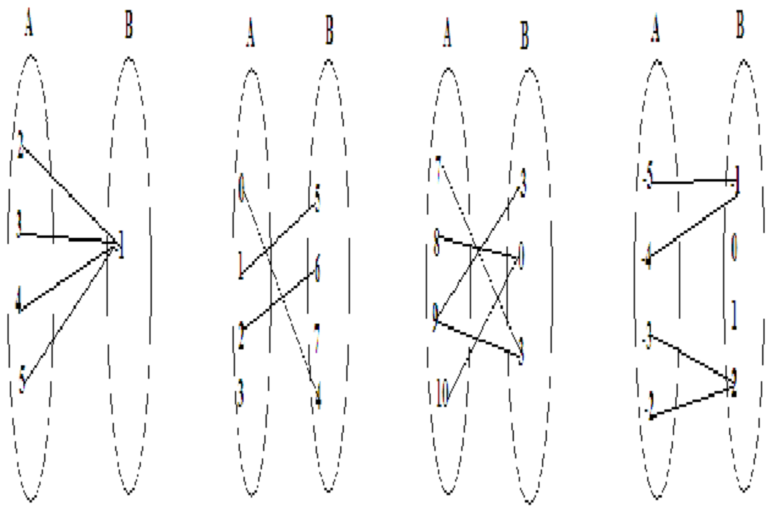
Ejemplo



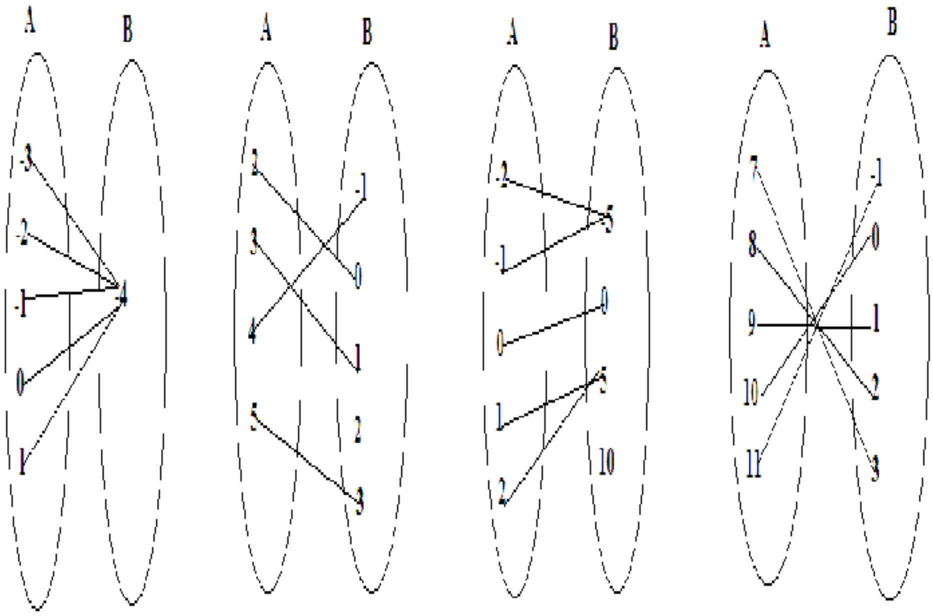
En este caso se puede visualizar que existen elementos del dominio que tienen la misma imagen, por ejemplo: $f(10) = f(11) = -2$, es decir que el 10 y el 11 tienen la misma imagen lo mismo sucede con el 12 y el 13 por lo tanto no tienen imágenes diferentes y en consecuencia dicha función no es inyectiva; por otro lado se tiene que en el conjunto B o rango de la función existe un elemento que no tiene ninguna contra imagen en el conjunto A, es decir, el 0 no está relacionado con ningún número en el conjunto A por lo tanto dicha función no es sobreyectiva, y como esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva en entonces se dice que es una función En.

Ejercicios propuestos

A.) Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no. Justifique debidamente su respuesta.



B.) Determinar qué tipo de función es cada una de las siguientes funciones presentadas a continuación. Justifique debidamente su respuesta.



A
B
-3
-2
-1
0
1
4
A
B
2
3
4
5
-1
0
1
2
3
A
B
-2
-1
0
1
2
5
0
-5
10
A
B
7
8
9
10
11
-1
0
1
2
3