

«Διπλώνοντας έναν Κυκλικό Δίσκο»

Εκπαιδευτικό Σενάριο: Οι κατασκευές origami ως εργαλείο διδασκαλίας της Γεωμετρίας και άλλων Μαθηματικών αντικειμένων

A. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μάθημα: Μαθηματικά (Γεωμετρία)

Τάξη: Ε΄–ΣΤ΄ Δημοτικού / Γυμνάσιο/Λύκειο

Διάρκεια: 2–3 διδακτικές ώρες

Οργάνωση: Αρχικά ατομική και στη συνέχεια ομαδοσυνεργατική διδασκαλία (2–4 μαθητές ανά ομάδα)

Θεματικό πεδίο

Βασικές θεματικές: Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο – Εισαγωγή στις γεωμετρικές σχέσεις μέσω διπλώσεων (paper folding / origami). Και ειδικότερα: Εύρεση διαμέτρου, εύρεση κέντρου του κύκλου, ορισμό ορθής γωνίας και καθέτων ευθειών, σχηματισμό εγγεγραμμένου τετραγώνου, περιγραφή κυκλικού τομέα, ίσα τόξα, μεσοκάθετο, κανονικό εξάγωνο, κανονικό (ισόπλευρο) τρίγωνο, ρόμβος, ισοσκελές τραπέζιο, πυραμίδα και αρκετές ακόμα μαθηματικές ανακαλύψεις, όπως κλάσματα, $1/3$, $1/6$, $1/4$ / κλπ .

Παιδαγωγική φιλοσοφία

Το σενάριο αξιοποιεί τη χαρτοδιπλωτική (origami) ως δημιουργικό μέσο για τη βιωματική προσέγγιση της Γεωμετρίας.

Οι μαθητές, χρησιμοποιώντας έναν απλό κυκλικό δίσκο από ριζόχαρτο, διερευνούν βασικές έννοιες της Γεωμετρίας (διάμετρος, ακτίνα, ίσα σχήματα, κανονικά πολύγωνα), ενώ παράλληλα αναπτύσσουν τη φαντασία και τη χαρά της ανακάλυψης.

Η μαθησιακή διαδικασία βασίζεται στις αρχές της **ανακαλυπτικής – διερευνητικής μάθησης**, της **βιωματικής εμπλοκής** και της **διαθεματικής σύνδεσης** Μαθηματικών, Ιστορίας και Τέχνης.

B. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

1. Γνωστικοί στόχοι

- Να κατανοούν και να κατασκευάζουν τη διάμετρο και το κέντρο κύκλου.
- Να δημιουργούν εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα (τετράγωνο, εξάγωνο, τρίγωνο).
- Να αντιλαμβάνονται την έννοια της ισότητας σχημάτων, της συμμετρίας και των αναλογιών.
- Να αναγνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα σε επίπεδα και στερεά σχήματα (τετράεδρο).
- Να γνωρίσουν ιστορικά τη συμβολή του Θαλή και του Πυθαγόρα στην εξέλιξη της μαθηματικής απόδειξης.
- Να ανακαλύψουν μόνοι τους, χωρίς την δική μας βοήθεια, τον τρόπο κατασκευής.
- Να συνειδητοποιήσουν τα μαθηματικά που χρησιμοποίησαν.
- Να «βιώσουν» γεωμετρικές έννοιες, δημιουργώντας σχήματα με τα ίδια τους τα χέρια και να γοητευτούν από τον τρόπο κατασκευής.
- Να ανακαλύψουν, ένα καινούργιο εργαλείο που λέγεται «δίπλωση χαρτιού» (paper folding)
- Τέλος, να νοιώσουν τη χαρά της εικαστικής δημιουργίας, με την κατασκευή στολιδίων και να συνθέσουν τα δικά τους δημιουργήματα.

2. Δεξιότητες

- Ανάπτυξη κριτικής σκέψης.
- Ενίσχυση της δεξιότητας παρατήρησης, πρόβλεψης και λογικής επιχειρηματολογίας.
- Συνεργασία και επικοινωνία εντός ομάδας.
- Δημιουργική χρήση υλικών (χαρτί, εργαλεία, χρώμα).

3. Στάσεις

- Ενίσχυση της θετικής στάσης προς τα Μαθηματικά μέσα από δημιουργικές δραστηριότητες.
- Καλλιέργεια αισθητικής και καλλιτεχνικής ευαισθησίας.
- Ανάπτυξη επιμονής, περιέργειας και χαράς της ανακάλυψης.

Γ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ / ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Φάση 1: Εισαγωγή – Κίνητρο

Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει έναν κυκλικό δίσκο και θέτει το ερώτημα:

«Τι μπορούμε να μάθουμε αν αρχίσουμε να διπλώνουμε έναν κύκλο;»

Σύντομη συζήτηση για το πώς η χαρτοδιπλωτική μπορεί να αποκαλύψει γεωμετρικές σχέσεις.

Μπορεί να προβληθεί μικρό απόσπασμα από το βίντεο:

[Folding the Circle – Bradford Hansen Smith](#)

Φάση 2: Δραστηριότητες διπλώσεων

1η Δίπλωση: Η διάμετρος

- Οι μαθητές διπλώνουν τον κύκλο στα δύο, σχηματίζοντας δύο ίσα ημικύκλια.
- **Έννοιες:** διάμετρος, κέντρο, ισότητα σχημάτων, κλάσμα $\frac{1}{2}$.
- **Ιστορική αναφορά:** Θαλής ο Μιλήσιος και η πρώτη «απόδειξη» στην Ιστορία.

Σε κάθε έναν δίνουμε ένα κυκλικό δίσκο από ριζόχαρτο και τους ζητάμε να κατασκευάσουν ΜΟΝΟ με δίπλωση δύο ίσα ημικύκλια. Ή: Χρησιμοποιώντας έναν κύκλο, προσπαθούμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις όπως: Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διάμετρο ενός κυκλικού χαρτιού με χαρτοδιπλωτική; *Η απάντηση έρχεται σχεδόν αυτόματα: Θα διπλώσουμε στη μέση το χαρτί ώστε το ένα μισό του να συμπίσει με το άλλο μισό. Ανοίγοντάς το ξανά, η δίπλωση θα είναι μια διάμετρος του κύκλου.*



(Κατασκευή διαμέτρου κύκλου με χαρτοδιπλωτική, έννοια της ισότητας σχημάτων και κλάσμα $\frac{1}{2}$)

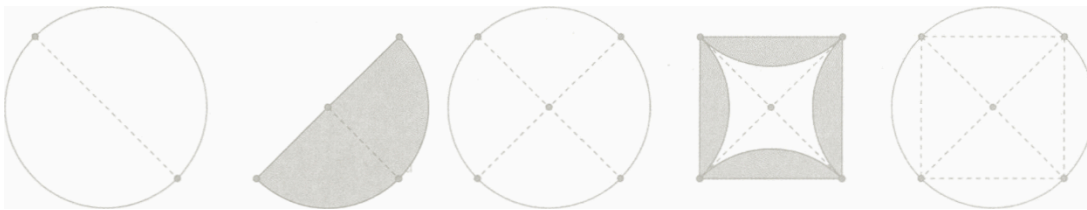
Ποιό χαρακτηριστικό ευθύγραμμο τμήμα του κύκλου εμφανίστηκε; Ποιά τμήματα του κυκλικού δίσκου είναι ίσα; **Ιστορικό σχόλιο:** Το ήξερες πως η πρώτη απόδειξη έγινε από το Θαλή; Στην ιστορία των Μαθηματικών, ο Θαλής ο Μιλήσιος απέδειξε ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δυο ίσα μέρη. Για πρώτη φορά στον

πλανήτη. Από τότε λοιπόν αρχίζουν και οι μπελάδες μας. Με νέες μαθηματικές θεωρίες αλλά και με νέους κλάδους στα Μαθηματικά. Άρα, από τον Θαλή και μετά μπήκε στην ανθρώπινη σκέψη η έννοια «απόδειξη». Η σχέση μεταξύ μαθηματικών και ιστορικής καθιέρωσης νομοθετικού συστήματος είναι έμμεση, λέγεται όμως πως η έννοια της λέξης απόδειξη, ήταν τόσο η απαρχή πολλών αποδείξεων όσο και της εμφάνισης νομικού συστήματος. Το διάσημο Πυθαγόρειο θεώρημα, ήταν γνωστό στους Κινέζους και στους Βαβυλώνιους πολλές χιλιάδες χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, για συγκεκριμένα ορθογώνια τρίγωνα. Όμως μόνο ο Πυθαγόρας **απέδειξε το θεώρημα για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα.**

2η Δίπλωση: Το εγγεγραμμένο τετράγωνο

- Διπλώνουν κάθετες διαμέτρους. Τα σημεία τομής ορίζουν τις κορυφές του τετραγώνου.
- Έννοιες: ορθές γωνίες, ίσα τόξα, κάθετες, συμμετρίες.
- Οι μαθητές «διαβάζουν» τις σχέσεις μέσα στο σχήμα και επαληθεύουν με παρατήρηση.

Αρκεί να προσδιορίσουμε με ακρίβεια, τη θέση των κορυφών τους επάνω στον κύκλο.



(Τα βήματα της κατασκευής του εγγεγραμμένου τετραγώνου: Καθώς οι διάμετροι που κατασκευάσαμε είναι κάθετοι, οι τέσσερις γωνίες που σχηματίζονται είναι ορθές με κορυφή το κέντρο του κύκλου (σημείο τομής των διαμέτρων). Πρόκειται δηλαδή για ίσες επίκεντρες γωνίες που αναγκαστικά βαίνουν σε ίσα τόξα (τα τεταρτοκύκλια). Χωρίσαμε δηλαδή τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα. Τώρα είμαστε σε θέση να διπλώσουμε και τις χορδές των τόξων, που και αυτές θα είναι ίσες, ώστε να κατασκευάσουμε τις πλευρές του τετραγώνου.)

3η Δίπλωση: Το κανονικό εξάγωνο

Με τις προηγούμενες διαμέτρους προσδιορίζεται το κέντρο του κύκλου.

Διπλώνουμε εμφανίζοντας μεσοκαθέτους των ακτίνων και σχηματίζονται έξι ίσα τρίγωνα.

Έννοιες: ισόπλευρα τρίγωνα, κανονικά πολύγωνα, συμμετρία, ίσα τόξα.

Να δημιουργήσετε ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Χρειάζεται να τους δώσουμε κυκλικά χαρτιά και να τους βοηθήσουμε λίγο, ίσως να τους επεσημάνουμε ότι με την προηγούμενη κατασκευή του τετραγώνου, γνώριζαν ήδη έναν τρόπο να προσδιορίσουν με ακρίβεια το κέντρο του κύκλου.

Για να την επιτύχουμε, θα έχουμε στο μυαλό μας ότι το κανονικό εξάγωνο διαιρείται σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή.



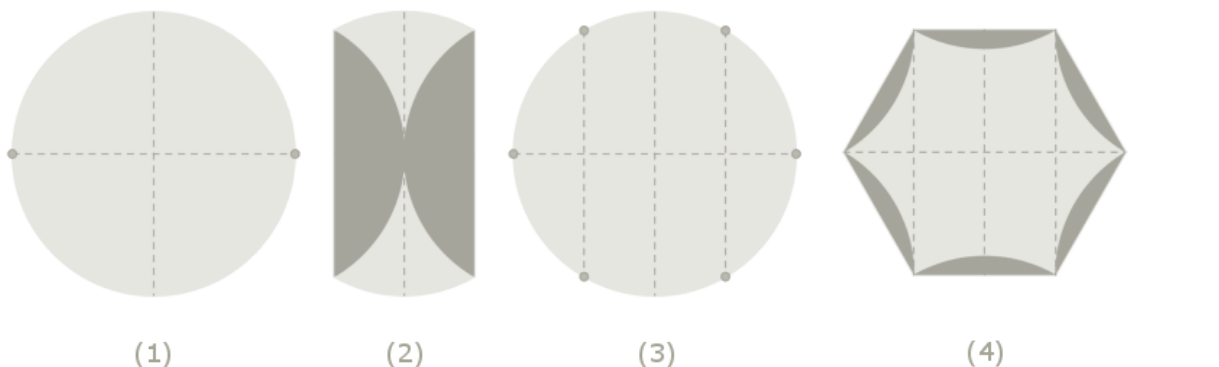
(Τα βήματα της κατασκευής του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου: **Βήμα 1^ο**: Κατασκευάζουμε διάμετρο ΑΔ και την κάθετη διάμετρο σε αυτή, ώστε να προσδιορίσουμε το κέντρο του κύκλου Ο.

Βήμα 2ο : Εάν φέρουμε τα σημεία A και Δ επάνω στο κέντρο O και τσακίσουμε, θα έχουμε κατασκευάσει τις μεσοκαθέτους των τμημάτων AO και OD , έστω BZ και ΓE αντίστοιχα (εικόνα 6, 2^ο και 3^ο σχήμα). Έτσι προσδιορίζονται οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές του κανονικού εξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, ας αναλογιστούμε εάν πράγματι το $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξάγωνο. Εφόσον το B είναι σημείο της μεσοκαθέτου του OA , θα ισταπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $BA=BO$. Επίσης, $BO=AO$ ως ακτίνες κύκλου. Δηλαδή, το τρίγωνο OAB έχει ίσες και τις τρεις πλευρές του, είναι επομένως ισόπλευρο. Το ίδιο αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα 5 τριγωνάκια $O\beta\Gamma$, $O\Gamma\Delta$, $O\Delta E$, $O E Z$ και $O Z A$.

Βήμα 3ο : Διπλώνοντας τις χορδές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , $E Z$ και $Z A$ θα έχουμε κατασκευάσει και τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου (εικόνα 6, 4^ο και 5^ο σχήμα).

Ας δούμε την ιδέα βήμα-βήμα και τα μαθηματικά που κρύβει:



Σχήμα (1): Ξεκινάμε, έχοντας τσακίσει δύο κάθετες διαμέτρους, ώστε να έχει προσδιοριστεί το κέντρο του κύκλου, αλλά και δύο αντιδιαμετρικά σημεία του.

Σχήμα (2): Μεταφέρουμε τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία στο κέντρο του κύκλου και τσακίζουμε.

Σχήμα (3): Με την προηγούμενη τσάκιση δημιουργήθηκαν οι μεσοκάθετοι των δύο ακτίνων και τα σημεία τομής τους με τον κύκλο (δηλαδή δημιουργήθηκαν 4 καινούρια σημεία). Καθένα από τα τέσσερα νέα σημεία, ως σημείο μεσοκαθέτου, απέχει εξίσου από ένα από τα δύο αρχικά σημεία του κύκλου και από το κέντρο του κύκλου. Έτσι, το εγγεγραμμένο εξάγωνο που έχει κορυφές τα 4 καινούρια σημεία και τα 2 αρχικά, έχει όλες του τις πλευρές ίσες με μια ακτίνα, επομένως είναι κανονικό εξάγωνο.

Σχήμα (4): Διπλώνουμε τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου για να το σχηματίσουμε.

4η Δίπλωση: Το ισόπλευρο τρίγωνο

Επιλέγουν μία ανά δύο κορυφές του εξαγώνου για το εγγεγραμμένο τρίγωνο.

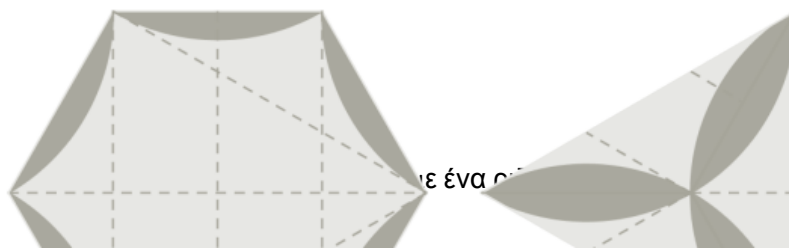
Έννοιες: εμβαδά, αναλογίες, απόσταση, ισότητα πλευρών.

Παρατήρηση: Το εξάγωνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο.

Η διαδικασία κατασκευής του εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου

Αν έχουμε κατασκευάσει το εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο είναι πολύ απλό να κατασκευάσουμε και το εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο: απλώς επιλέγουμε μία-παρα-μία τις κορυφές του εξαγώνου για να γίνουν οι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου (το $B\Delta Z$ στην εικόνα 7, 1 ο και 2 ο σχήμα).

Αν διπλώσουμε αντίθετα τις πλευρές του τριγώνου από τις πλευρές του εξαγώνου, θα πάρουμε μια εντυπωσιακή ψηφίδα, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα παρακάτω.



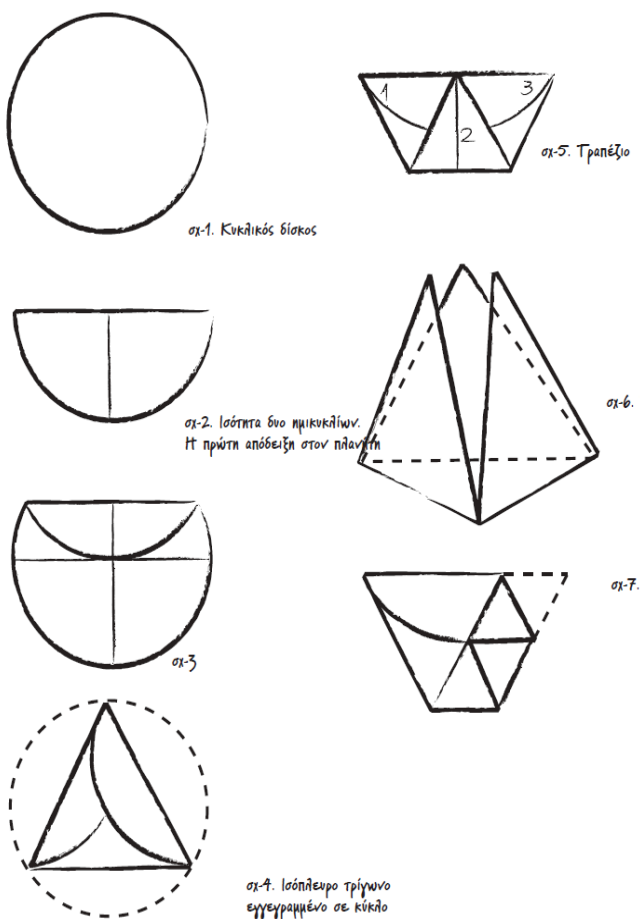
Ας σχολιάσουμε μόνο ότι η δίπλωση του εξαγώνου σε τρίγωνο, καθιστά ιδιαίτερα εμφανείς τις εξής ιδιότητες των σχημάτων: Το εξαγώνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο, το απόστημα του τριγώνου είναι μισή ακτίνα. Ακόμα, η δίπλωση των κυκλικών τμημάτων, δημιουργεί καμπυλόγραμμα σχέδια που οι μαθητές θα δουν σε επόμενο κεφάλαιο για τον υπολογισμό του εμβαδού τους. Έτσι, εξοικειώνονται με την ανάλυση ενός σύνθετου σχεδίου σε απλούστερα, όπως πολύγωνα, κυκλικούς τομείς ή τμήματα, δεξιότητα ιδιαίτερα χρήσιμη.

5η Δίπλωση: Το τετράεδρο

Από το ισόπλευρο τρίγωνο, με κατάλληλες διπλώσεις, σχηματίζεται τετράεδρο.

Έννοιες: στερεά σώματα, όγκοι, επιφάνειες, συμμετρία στο χώρο.

Η 5^η δίπλωση, στηρίζεται στα βήματα που έχουν προηγηθεί.



Τετράεδρο είναι μια πυραμίδα που η κάθε έδρα της είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο

- Τι μαθηματικές έννοιες ανακαλύψαμε;
 - Ποιο σχήμα σας φάνηκε πιο «μαγικό» όταν εμφανίστηκε;
 - Πώς η δίπλωση βοήθησε να καταλάβετε τη Γεωμετρία καλύτερα;
 - Ποιος ήταν ο ρόλος της «απόδειξης» στην ιστορία των Μαθηματικών;
-

Δ. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Διαμορφωτική αξιολόγηση

- Παρατήρηση συμμετοχής και συνεργασίας στις ομάδες.
- Καταγραφή των μαθηματικών εννοιών που αναφέρουν οι μαθητές.
- Ερωτήσεις καθοδήγησης και αναστοχασμού («Τι σχέση έχει αυτό με...;», «Πώς το εξηγείς;»).

Τελική αξιολόγηση (σε ομάδες των 4 ατόμων)

- Κάθε ομάδα παρουσιάζει τη δική της κατασκευή και εξηγεί τα μαθηματικά που εντόπισε.
 - Δημιουργία μικρής αφίσσας ή poster με φωτογραφίες των διπλώσεων και μαθηματικά σχόλια.
 - Προαιρετικά: σύντομη **θεατρική αναπαράσταση** του Θαλή και της έννοιας της απόδειξης.
-

Ε. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Επεκτάσεις

- **Εικαστικά:** Κατασκευή χριστουγεννιάτικων στολιδιών ή διακοσμητικών από τα σχήματα.
- **Ιστορία των Μαθηματικών:** Από τον Θαλή και τον Πυθαγόρα μέχρι τη σύγχρονη απόδειξη.
- **Πληροφορική:** Ψηφιακή αναπαράσταση διπλώσεων με προγράμματα 3D (π.χ. GeoGebra, Tinkercad).
- **Φυσική:** Συμμετρία, ισορροπία, και γεωμετρία στη φύση.

Διδακτικές επισημάνσεις

- Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι **καθοδηγητικός** και όχι επεξηγηματικός.
 - Η διαδικασία προωθεί τη μάθηση μέσω **ανακάλυψης και δράσης**.
 - Ενδεικνύεται η χρήση **κυκλικών ριζόχαρτων** ή αυτοσχέδιων δίσκων .
-

Πηγές – Υλικό Αναφοράς

- [Α.Σ.Τ.Ο. – Εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία](#)
 - [Ομάδα Εναλλακτικής Εκπαίδευσης Α.Σ.Τ.Ο. – Επικοινωνούμε](#)
 - [Ο Πύργος του Β – Σάκης Ροδίτης \(YouTube\)](#) (Ολόκληρο το βιβλίο έχει αναρτηθεί στην ιστοσελίδα της ομάδας : <https://astoenallaktiki.gr/>)
 - [Bradford Hansen Smith – Folding the Circle for Information](#)
-

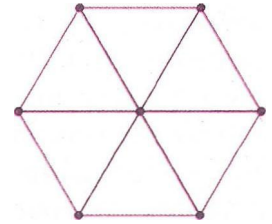
Συνοπτικά:

Το εκπαιδευτικό σενάριο «Διπλώνοντας έναν κυκλικό δίσκο» αξιοποιεί την αισθητική, την ιστορική και τη βιομαθηματική διάσταση της Γεωμετρίας, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη μέσα από το παιχνίδι, τη συνεργασία και τη δημιουργία.

Είναι απαραίτητο να προσθέσουμε κάποια σχόλια:

- ✓ Αν δεν έχετε κυκλικά χαρτιά στη διάθεσή σας, δημιουργήστε μόνοι σας σχεδιάζοντας το περίγραμμα ενός CD σε χαρτί και κόβοντάς το προσεκτικά με ψαλίδι.
- ✓ Για να καταλάβουμε το αίτημα των κατασκευών, θα πρέπει να υπενθυμίσουμε κάποιες γνώσεις:

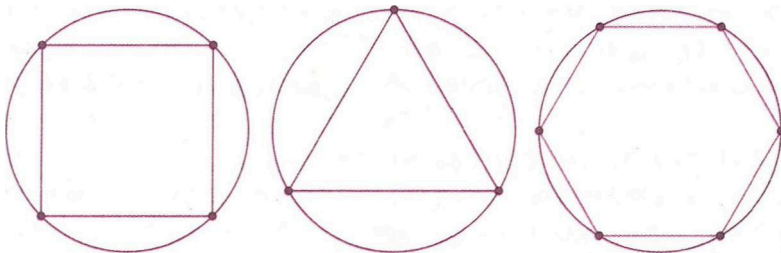
✓ **Κανονικό λέγεται το εξάγωνο** που έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι απλό να δούμε ότι το κανονικό εξάγωνο διαιρείται σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή -το κέντρο του κανονικού εξαγώνου- κάπως έτσι:



(ένα κανονικό εξάγωνο διαιρεμένο σε ισόπλευρα τρίγωνα)

✓ **Εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ένα πολύγωνο** που οι κορυφές του ανήκουν στον κύκλο.

Δοσμένου λοιπόν του κύκλου, θα πρέπει να σκεφτούμε πώς θα διπλώσουμε το κυκλικό χαρτί ώστε να πάρουμε πάνω-κάτω τα ακόλουθα:



- ✓ Με την ευκαιρία της παρουσίασης της μαθηματικής έννοιας «απόδειξη», μπορούμε να στήσουμε ένα μικρό θεατρικό, όπως: « Η απόδοση δικαιοσύνης από τον Φαραώ, πριν και μετά την εμφάνιση του αιτήματος, «απόδειξέ το!»
- ✓ Χριστουγεννιάτικα στολίδια και άλλες καλλιτεχνικές κατασκευές.

