

Quelques problèmes de microfluidique pour la réalisation de « laboratoires sur puce »

Remarque préliminaire

De nombreux problèmes, particulièrement en mécanique des fluides, sont difficiles à résoudre exactement. Sans les résoudre, nous pouvons obtenir des propriétés intéressantes de leur solution en considérant les dimensions des grandeurs pertinentes. Pour cela, nous pouvons exploiter l'une des trois démarches suivantes.

1) Si une grandeur dimensionnée a est fonction inconnue de grandeurs dimensionnées b, c, d , cherchons les exposants b, g, d tels que la relation $a = kb^b c^g d^d$ soit une relation homogène, k, b, g, d étant sans dimension. Si la solution en b, g, d est unique, nous avons trouvé la fonction inconnue, au facteur k près, qui est une constante inconnue.

2) Théorème de Vaschy-Buckingham.

Toute relation entre N grandeurs dépendant de p dimensions peut être mise sous la forme d'une relation entre $N - p$ monômes sans dimension.

La démarche 1 correspond au cas $N - p = 1$.

Exemple de cas $N - p > 1$: exprimer la force F sur une boule de diamètre D en mouvement relatif de vitesse v par rapport à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η .

$$N = 5 \quad p = 3 \quad N - p = 2$$

. La relation est de la forme $F = \frac{1}{2} \rho v^2 D^2 C_x$, où C_x est une fonction universelle du nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$.

3) Faire des changements de variables qui ramènent à un problème portant sur des grandeurs non dimensionnées.

I. Ecoulement de fluide en micro-canal

I.1. Écoulement sous un gradient de pression constant.

I.1.1. Le membre de gauche de l'équation de Navier Stokes représente la quantité volumique d'accélération du fluide. Les termes du membre de droite représentent respectivement les forces volumiques de pesanteur, de pression et de viscosité.

$$Re = \frac{\rho V D}{\eta}$$

I.1.2. où V est la vitesse relative du fluide au loin et D une longueur caractéristique, souvent la dimension transversale de l'objet déviant le fluide ; toutefois, pour une aile d'avion, D est la dimension de l'aile dans la direction parallèle à la vitesse.

Imaginons un cube de fluide d'arête D et de masse ρD^3 ; quand il décrit un cercle de rayon D à la vitesse V , la force d'inertie qu'il subit est $F_i = \rho D^3 \frac{V^2}{D}$. Si le gradient de la vitesse est $\frac{V}{D}$, la force de viscosité qu'il transmet par une face du

cube d'aire D^2 est $F_v = \eta \frac{V}{D} D^2$. Nous voyons alors que $Re = \frac{F_i}{F_v}$. D'une façon générale, le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

Dans le cas du canal, $D = h$, dimension transversale la plus petite. Les longueurs w et L ne jouent pas de rôle, tout se passe comme si elles étaient infinies.

$$Re = \frac{\rho V_0 h}{\eta} = \frac{10^3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-3}$$

Comme $Re < 1$, l'écoulement est laminaire ; les forces d'inertie sont négligeables.

I.1.3 L'écoulement étant suivant Ox , $\vec{v} = v(x, y, z, t) \vec{e}_x$.

A l'approximation w infini, le problème est invariant par translation parallèle à Oy , donc $\vec{v}$ ne dépend pas de y .

Le fluide étant incompressible, $\text{div} \vec{v} = 0$, soit $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$: $\vec{v}$ ne dépend pas de x .

Concluons que $\vec{v} = v_x(z, t) \vec{e}_x$.

$$0 = -\frac{1}{h} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{2h} \frac{d^2 v_x(z)}{dz^2} \quad \text{qui}$$

I.1.4. Projétons sur Ox l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement stationnaire :

montre que $\frac{1}{h} \frac{dP}{dx}$ est une fonction de z seul, et donc qu'il ne dépend pas de x . En considérant le parcours complet du canal

selon Ox , $\frac{1}{h} \frac{dP}{dx} = -\frac{DP}{L}$, d'où l'équation différentielle $\frac{d^2 v_x}{dz^2} = -\frac{DP}{hL}$.

$$v_x = -\frac{DPz^2}{2hL} + az + b$$

I.1.5. La solution de l'équation différentielle est

Le non glissement aux parois (qui n'est pas une hypothèse, mais une nécessité : sinon la force de viscosité exercée par les parois serait infinie) impose $v_x(z=0) = 0$ et $b = 0$ et $v_x(z=h) = 0$ et $a = \frac{hDP}{2hL}$, d'où :

$$v_x = \frac{DP}{2hL} z(h-z)$$

$$v_x(z) \text{ est maximum pour } z = \frac{h}{2} \text{ et vaut alors } v_{\max} = \frac{h^2 DP}{8hL}$$

$$V_0 = \frac{1}{hw} \int_0^h v_x dz = \frac{1}{h} \int_0^h v_x dz = \frac{DP}{2hL} \left[\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{h^2 DP}{12hL}$$

La vitesse moyenne est

$$Q = \int_0^h v_x dz = hwV_0 = \frac{h^3 w DP}{12hL}$$

I.1.6.

$$DP = \frac{12hLQ}{h^3 w} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-12}}{(10^{-5})^3 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ Pa}$$

I.1.7. Si $h = 10 \text{ mm}$,

$$DH = \frac{DP}{rg} = \frac{120}{10^3 \cdot 9,8} = 0,0122 \text{ m} = 12,2 \text{ mm}$$

Si $h = 100 \text{ mm}$, la formule de Hagen-Poiseuille donne $DH = 0,012 \text{ mm}$, plus difficile à régler, d'autant qu'il faut tenir compte de la tension superficielle (voir II.4). A noter aussi que $h < w$ ne serait plus vraie.

I.2. Ecoulement biphase

Remarques préliminaires.

Les fluides 1 et 2 sont non miscibles. Habituellement, leur interface est horizontale, mais ici une interface verticale minimise l'aire de cette interface et l'énergie de tension superficielle est beaucoup plus grande que celle de pesanteur.

L'équilibre de l'interface exige la continuité de la vitesse $v_1(z) = v_2(z)$ pour $y = aw$; mais, comme $w \gg h$, ceci n'agit sur le champ de vitesse que dans une zone de faible largeur, de sorte qu'on peut oublier cette condition et supposer v_1 et v_2 indépendants de y et différents.

I.2.1.

$$Q_1 = \frac{(1+a)h^3 w DP}{12L h_1} \quad \frac{1+a}{h_1 Q_1} = \frac{1-a}{h_2 Q_2} \quad a = \frac{h_1 Q_1 - h_2 Q_2}{h_1 Q_1 + h_2 Q_2}$$

$$a = \frac{50 \cdot 10^{-3} - 10^{-1}}{50 \cdot 10^{-3} + 10^{-1}} = -0,333$$

I.2.2.

II. Analogie électrique des canaux microfluidiques.

II.1. Analogues hydrauliques du courant et de la tension électrique.

II.1.1. L'intensité du courant électrique est le rapport de la charge transférée au temps. Son analogue est le rapport du volume de fluide transféré au temps, c'est-à-dire le débit de volume. Pendant dt , le fluide parcourt $v dt$, le volume transféré est $\int v dt dS$ et le débit de volume est $Q = \int v dS = V_0 A$.

Le fluide étant incompressible et le canal complètement rempli, le débit de volume est le même pour toutes les sections du canal, comme le courant électrique est le même le long d'un fil ; de même, la loi des nœuds est valable en électrocinétique comme en microfluidique.

II.1.2. La puissance mécanique P_m reçue par le fluide est une somme de termes constitués du produit scalaire de la force extérieure, soit $(P + DP) d\vec{S}$ à l'entrée et $-P d\vec{S}$ à la sortie, par la vitesse :

$$P_m = \iint_{\text{entrée}} (P + DP) d\vec{S} \cdot \vec{v} - \iint_{\text{sortie}} P d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

Comme le débit de volume Q est le même à l'entrée et à la sortie, $P_m = Q DP$.

Cette formule, analogue à l'expression de la puissance électrique $P = UI$, montre que l'analogue de la tension est la différence de pression et que l'analogue du potentiel électrique est la pression.

II.2. Résistance hydraulique. Application au tri de gouttelettes.

II.2.1.
$$R_{hd} = \frac{DP}{Q} = \frac{12\eta L}{h^3 w}$$

II.2.2.
$$r_e = \frac{R_{hd}}{L}$$
 (c'est la résistance linéique de l'eau).

II.2.3.
$$DP = n \frac{2\eta_e (l - L_g) Q_0}{h^3 w} + \frac{12\eta_h L_g Q_0}{h^3 w} = Q_0 r_e \left(\frac{2\eta_e}{\eta_h} - 1 \right) + n L_g \frac{\eta_h}{h_e} \frac{Q_0}{h_e}$$

II.2.4. Si les fluides sont incompressibles et les canaux complètement remplis, le volume $Q_0 dt$ qui arrive à la bifurcation pendant dt est égal à celui $Q_1 dt + Q_2 dt$ qui en repart. D'où $Q_0 = Q_1 + Q_2$, qui est l'équivalent de la loi des nœuds de Kirchhoff.

II.2.5. En l'absence de gouttelettes, la loi de Hagen-Poiseuille dit que $Q_1 L_1 = Q_2 L_2$, donc les gouttelettes partent du côté 1.

$$Q_1 \left(\frac{2\eta_e}{\eta_h} - 1 \right) + n_1 L_g \frac{\eta_h}{h_e} \frac{Q_1}{h_e} = Q_2 L_2$$

II.2.6. Comme les deux bras secondaires sont soumis à la même différence de pression,

Comme les gouttelettes vont dans le bras secondaire où le débit est le plus grand, $Q_1 > Q_2$.

$$L_1 + n_1 L_g \frac{\eta_h}{h_e} < L_2$$

Il en résulte que l'écoulement n'est stable que si

Comme $n_1 = \frac{L_1}{l}$, on obtient $\frac{L_g}{l} < \frac{h_e}{h_h} \frac{L_2 - L_1}{L_1}$.

Remarque : l est la période spatiale des gouttelettes dans le bras 1 ; cette distance varie quand L_1 ou L_2 varient, ce qui réduit l'intérêt de la condition demandée.

II.3. Inertance hydraulique.

$$\vec{p} = rL \iint \vec{v} dS = rL Q \vec{e}_x$$

II.3.1.a. La quantité de mouvement du fluide dans le canal est

II.3.1.b.

Introduction.

On peut répondre intuitivement (réponse 1), en appliquant le théorème d'Euler, ou théorème de la quantité de mouvement pour un système ouvert, qui est hors programme (réponse 2) ou en démontrant ce théorème (réponse 3).

Réponse 1.

On devine que :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$ADP_i = \frac{d}{dt}(rLQ)$$

Réponse 2.

La projection sur l'axe des x de la force totale agissant sur le fluide contenu dans le canal se réduit à la force de pression ; en effet, sans viscosité, le poids et la réaction des parois du canal sur le fluide sont perpendiculaires à l'axe des x ; le

théorème de la quantité de mouvement projeté sur l'axe des x s'écrit $ADP_i = \frac{dp}{dt} + F_p$, où F_p est le flux entrant de quantité de mouvement selon l'axe des x ; celui-ci est nul, car la vitesse ne dépend pas de x , donc est la même à l'entrée et à la sortie.

Réponse 3.

Considérons le système constitué par l'ensemble du fluide situé dans le micro-canal à l'instant t et par le fluide qui y pénètre entre les instants t et $t + dt$ et appliquons lui le théorème de la quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Comme la vitesse est uniforme, le fluide contenu dans le micro-canal a la quantité de mouvement $\vec{p}_1 = rLQ\vec{e}_x$; à l'instant initial t , le fluide qui pénètre entre t et $t + dt$, de masse dm , possède la quantité de mouvement $\vec{p}_2 = dm\vec{v}$; à l'instant final $t + dt$, le fluide qui est sorti entre t et $t + dt$ possède la quantité de mouvement $\vec{p}_3 = dm\vec{v}$. Pendant dt , la variation de quantité de mouvement du système est $d\vec{p} = (\vec{p}_1 + d\vec{p}_1 + \vec{p}_3) - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = d\vec{p}_1$. D'où $\frac{d\vec{p}}{dt} = rL \frac{dQ}{dt} \vec{e}_x$.

Conclusion.

$$DP_i = I_{hd} \frac{dQ}{dt}, \text{ où } I_{hd} = \frac{rL}{A}$$

II.3.1.c. I_{hd} représente l'inertie du fluide dans le canal. C'est l'analogue de l'inductance.

II.3.2.a. Supposons l'équation différentielle du régime transitoire analogue à celle, $u = L \frac{di}{dt} + Ri$, d'une bobine; d'où $DP = I_{hd} \frac{dQ}{dt} + R_{hd}Q$.

Remarque : cette analogie est approximative, car le freinage du courant électrique est proportionnel à la vitesse et exercé par le volume du conducteur, tandis que celui du liquide est proportionnel au gradient de la vitesse et exercé par les parois; la suite montre que cette approximation est suffisante pour le problème.

$$Q = \frac{DP}{R_{hd}} \exp\left(-\frac{t}{t_L}\right), \text{ où } t_L = \frac{I_{hd}}{R_{hd}} = \frac{rh^2}{12h}$$

II.3.2.b. Cette équation différentielle a pour solution

$$t_L = \frac{10^3 \cdot (10^{-5})^2}{12 \cdot 10^{-3}} = 8,33 \text{ ms}$$

II.3.2.c. Pour une expérience typique, d'une durée de l'ordre de la minute ou de l'heure, l'inertance est négligeable et le régime permanent s'établit instantanément.

II.4. Compliance hydraulique.

$$DP_{cap} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}} = 14000 \text{ Pa} = 0,14 \text{ bar}$$

II.4.1.a.

$$DP_{hyd} \gg rgh = 0,1 \text{ Pa} < DP_{cap}$$

La pression dans le liquide est à gauche 1 bar et à droite 0,86 bar; ce déséquilibre provoque l'aspiration de l'eau par le micro-canal.

II.4.1.b. Comme la surface du réservoir est très grande, on peut négliger la vitesse au niveau de cette surface dans la

relation de Bernoulli, qui s'écrit $\frac{P_0}{r} = \frac{P_A}{r} + \frac{1}{2}v^2$ et $P_0 - P_A = \frac{1}{2}rv^2$.

$$II.4.1.c. P_A - (P_0 - DP_{cap}) = r_e v^2 \Rightarrow P_A - P_0 = r_e v^2 - \frac{2g}{h}$$

$$II.4.1.d. \frac{1}{2}rv^2 + r_e v^2 - \frac{2g}{h} = 0$$

II.4.1.e. La dimension de la pression est $[P] = ML^{-1}T^{-2}$ et celle de la viscosité $[h] = [P]T = ML^{-1}T^{-1}$. D'où

$$[r_e A] = \frac{2h}{r} \frac{[P]}{v} = ML^{-3}T^{-1}$$

$$[q] = \frac{r}{r_e A} \frac{[P]}{v} = \frac{ML^{-3}}{ML^{-3}T^{-1}} = T$$

qui montre que $T = t/q$ est sans dimension.

$$\frac{r g}{h (r_e A)^2} \frac{ML^{-3} ML^{-1} T^{-2}}{(ML^{-3} T^{-1})^2} = L^2$$

qui montre que $Y = x/b$ est sans dimension.

Remplaçons x et $\frac{dx}{dT}$ dans l'équation différentielle par bY et $\frac{b dY}{dT}$:

$$\frac{r b^2 h}{4 g q^2} \frac{d^2 Y}{dT^2} + \frac{r_e A b^2 h}{2 g q} Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

$$\frac{r b^2 h}{4 g q^2} = \frac{r 4 r g h 4 (r_e A)^2}{(r_e A)^2 h 4 g r^2} = 4 \quad \frac{r_e A b^2 h}{2 g q} = r_e A \frac{4}{(r_e A)^2} \frac{r g h}{h} \frac{2 r_e A}{r} = 4$$

On obtient
$$4 \frac{d^2 Y}{dT^2} + 4 Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

II.4.1.f.
$$q = \frac{10^3 \cdot (10^{-5})^2}{24 \cdot 10^{-3}} = 4,17 m^3$$
 (moitié de t_L de II.3.2.c) ;

$$b = \frac{h^2}{6 h_e} \sqrt{\frac{r g}{h}} = \frac{(10^{-5})^2}{6 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}}} = 44,1 mm$$

II.4.1.g. A $T = 0$, $Y = 0$. Au début du mouvement, $Y \ll 1$ et l'équation différentielle peut être approximée par

$$4 \frac{d^2 Y}{dT^2} - 1 = 0 \quad \text{Comme la pression capillaire force } Y \text{ à augmenter, } \frac{dY}{dT} > 0, \text{ d'où } \frac{dY}{dT} = + \frac{1}{2} \text{ et } Y = \frac{T}{2}.$$

Cette approximation n'est valable que si :

$$4 \frac{d^2 Y}{dT^2} \gg Y \frac{dY}{dT}$$

$$\frac{1}{2} \gg Y$$

$$T \ll 1$$

Au bout d'un temps suffisant, il faut donc considérer une autre approximation :

$$Y \gg 1$$

$$4 Y \frac{dY}{dT} - 1 = 0$$

$$2 Y^2 - T = cste$$

Pour déterminer cette constante, faisons l'approximation, manifestement fautive, mais incontournable, d'étendre ces deux approximations jusque $Y = 1$ et d'écrire la continuité de $Y(T)$ à cette limite : $T = 2$; $cste = 0$.

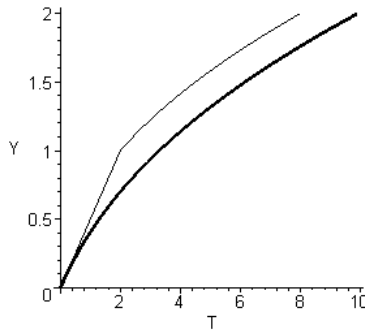
Dans ce cadre d'approximation, la solution est : si $T < 2$, $Y = \frac{T}{2}$; si $T > 2$, $Y = \sqrt{\frac{T-2}{2}}$.

Vérifions que chaque approximation est valable dans son domaine de validité :

Si $Y \ll 1$, $4 \frac{d^2 Y}{dT^2} = \frac{1}{4}$ et $Y \frac{dY}{dT} = \frac{Y}{4}$; $4 \frac{d^2 Y}{dT^2} \gg Y \frac{dY}{dT}$ est bien vérifié ;

Si $Y \gg 1$, $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2\sqrt{T-2}}$, $4 \frac{d^2 Y}{dT^2} = \frac{1}{8T} = \frac{1}{16 Y^2}$ et $Y \frac{dY}{dT} = \frac{1}{4}$; $4 \frac{d^2 Y}{dT^2} \ll Y \frac{dY}{dT}$ est bien vérifié.

II.4.1.h.



En gras, la solution exacte $Y(T)$, en plus fin la solution approximative proposée par l'énoncé.

Comme on l'a vu plus haut, les deux approximations se raccordent pour $T = 2$, soit $t = 2q = 8\text{ms}$, qui est le temps caractéristique demandé.

Remarque sur II.4.1.g.

Les approximations demandées donnent une solution mathématiquement médiocre (mais peut-être physiquement suffisante), car l'équation différentielle en $T(Y)$ se résout exactement et très simplement :

$$\frac{dT}{dY} - 4Y \frac{dT}{dY} - 4 = 0$$

$$\frac{dT}{dY} = 2Y \pm \sqrt{4Y^2 + 4}$$

comme $\frac{dT}{dY} > 0$, il faut choisir le signe + devant le radical ;

$$T = \int_0^Y dY (2Y + \sqrt{4Y^2 + 4}) = Y^2 + Y\sqrt{Y^2 + 1} + \text{argsh} Y$$

Le terme en $\text{argsh} Y$ implique que la constante d'intégration considérée en II.4.1.g n'est pas en réalité constante et qu'elle n'a pas de limite pour $Y \rightarrow \infty$.

Si $Y \ll 1$, on retrouve bien $T \approx 2Y$; si $Y \gg 1$, on retrouve bien $T \approx 2Y^2$.

$$P_0 L = P_{\text{air}} (L - x) \Rightarrow x = L \left(1 - \frac{P_0}{P_{\text{air}}} \right)$$

II.4.2.a. Appliquons la loi de Boyle à l'air renfermé :

$$Q = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt} = \frac{hwL P_0}{P_{\text{air}}^2} \frac{dP_{\text{air}}}{dt} \quad \text{de la forme} \quad Q = C \frac{dP_{\text{air}}}{dt}$$

Le volume d'eau dans le tube est $V_{\text{eau}} = hw x$ et le débit entrant

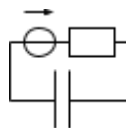
$$C = \frac{hwL P_0}{P_{\text{air}}^2}$$

, avec

$$\text{II.4.2.b. A l'équilibre, } P_{\text{eq}} = P_0 + \frac{2g}{h} = 1,14 \text{ bar} ; \quad \frac{x_{\text{eq}}}{L} = 1 - \frac{1}{1,14} = 0,123$$

$$\text{II.4.2.c. Les relations entre } P_{\text{air}} \text{ et } Q \text{ sont } \frac{2g}{h} + P_0 - P_{\text{air}} = \frac{12hL}{h^3 w} \left(1 - \frac{P_0}{P_{\text{air}}} \right) Q = \frac{hwL}{P_{\text{air}}^2} \frac{dP_{\text{air}}}{dt} \quad \text{et} \quad Q = \frac{hwL}{P_{\text{air}}^2} \frac{dP_{\text{air}}}{dt} \quad \text{Cela fait penser}$$

à :



où la source de tension continue schématise la tension superficielle, la résistance la viscosité et le condensateur la variation de pression due à la loi de Boyle. Toutefois, les équations du micro-canal sont plus compliquées, comme si les valeurs de la résistance et de la capacité dépendaient de l'état électrique du réseau.

II.5. Actuateur de fluides diélectriques.

$$\text{II.5.1. } C = \frac{\epsilon_e \epsilon_0 w (x_{\text{eq}} + x)}{h} + \frac{\epsilon_a \epsilon_0 w (L - x_{\text{eq}} - x)}{h}$$

$$\text{II.5.2. } W = \frac{1}{2}CU^2$$

$$\text{II.5.3. } F_{el} = \frac{dW}{dx} e_x = \frac{(e_e - e_a) e_0 W U^2}{2h} e_x$$

; cette force tire le liquide vers l'intérieur du tube ; sous son effet, la pression dans l'air enfermé à l'équilibre passe de $P_{air} = P_0 + D P_{cap}$ à $P_{air} = P_0 + D P_{cap} + P_{el}$, avec

$$P_{el} = \frac{F_{el}}{hw} = \frac{(e_e - e_a) e_0 U^2}{2h^2}$$

$$\text{II.5.4. Selon la loi de Boyle, } P_0 L = (P_0 + D P_{cap})(L - x_{eq}) = (P_0 + D P_{cap} + P_{el})(L - x_{eq} - x_{eq}) \text{ . D'où :}$$

$$\frac{x_{eq}}{L} = \frac{P_0 P_{el}}{(P_0 + D P_{cap})(P_0 + D P_{cap} + P_{el})}$$

$$\text{Si } D P_{cap} \text{ et } P_{el} \text{ sont petits devant } P_0, \frac{x_{eq}}{L} \gg \frac{P_{el}}{P_0} \text{ .}$$

$$P_{el} = \frac{(80 - 1) \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2}{2 \cdot (10^{-5})^2} = 350 \text{ Pa}$$

II.5.5.

$$x_{eq} = 1000 \text{ mm} \cdot \frac{10^5 \cdot 350}{(1,14 \cdot 10^5)^2} = 2,7 \text{ mm}$$

Ce dispositif est efficace pour contrôler précisément un petit déplacement, mais ne peut créer un grand déplacement à cause de la limitation de U/h au champ disruptif, dans l'air sec $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; en effet, avec les valeurs de l'énoncé, $U/h = 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

III. Microfluidique et diffusion moléculaire

III.1. Diffusion de traceurs dans un fluide au repos

$$\text{III.1.1. } \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c = \frac{c_0}{2}$$

III.1.2.

Réponse 1.

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial y} = \pm \frac{w \ddot{c}}{2} = 0 \text{ et}$$

A priori, la solution de cette équation différentielle, avec les conditions aux limites $c(t=0)$ égal à 0 ou c_0 , dépend de y , t , D et w . T_w est une fonction de D, w qui a la dimension d'un temps, soit

$$T_w = k \frac{w^2}{D}, \text{ où } k \text{ est une constante universelle non dimensionnée, qui dépend de la façon dont on définit } T_w.$$

Si on suit l'énoncé, il existe une relation entre T_w , w et D . Le théorème de Vaschy-Buckingham dit que cette

$$T_w = \frac{w^2}{D} f\left(\frac{w}{D T_w}\right)$$

relation est de la forme

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer la constante k ou la fonction f et donc de faire le calcul demandé. Il faudrait résoudre l'équation aux dérivées partielles. Ne la résolvons pas et supposons $k = f(1/2) = 1$. Alors

$$T_w = \frac{(10^{-4})^2}{10^{-11}} = 10^3 \text{ s}$$

pour une longueur de diffusion de l'ordre de w .

Réponse 2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \\ c(y, 0) &= c_0 \text{ si } y > 0 \\ c(y, 0) &= c_0 \text{ si } y < 0 \end{aligned}$$

Nous cherchons $c(y, t)$ tel que :

Supposons d'abord w infini. Alors, la solution est $c = \frac{c_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$, où $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$. Le

temps de relaxation est tel que $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$, soit $\frac{dy}{\sqrt{4Dt}} = 0,477$, soit environ $T_w = \frac{d_y^2}{D}$.

En réalité, comme w est fini, le temps de relaxation est inférieur, car l'absence de diffusion au delà de $|y| = w/2$ accélère la relaxation. Toutefois, le calcul de T_w étant difficile, nous allons appliquer la formule précédente.

Pour $d_y = \frac{w}{2}$, $T_w = \frac{w^2}{4D} = \frac{(10^{-4})^2}{4 \cdot 10^{-11}} = 250 \text{ s}$.

III.2. Diffusion de traceurs dans un écoulement biphasique

III.2.1. La densité de courant de convection des traceurs est $j_{conv} = cv_0 \frac{\partial c}{\partial x}$; cette expression est valable même si D est non nul.

III.2.2. L'équation de conservation des traceurs est $\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(j_{conv} + j_{diff})$, où la densité de courant de diffusion est

$$j_{diff} = -D \operatorname{grad}(c) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{En régime stationnaire,}$$

III.2.3. Le temps caractéristique convectif est $\frac{h}{v_0}$; ce n'est pas $\frac{w}{v_0}$, car les tourbillons qui peuvent s'établir ont une dimension h et non w ; ainsi, dans une expérience de transport convectif de la chaleur entre deux plaques grandes et proches de températures différentes, la taille des cellules de convection est la distance entre plaques, et non la largeur des plaques.

Le temps caractéristique diffusif sur une longueur h est $\frac{h^2}{D}$.

$$Pe = \frac{hv_0}{D} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-4}}{10^{-11}} = 100$$

Comme ce nombre est élevé, on peut négliger la diffusion dans la direction de la convection et l'équation du problème se

réduit à $v_0 \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$.

III.2.4.

Faisons le changement de variables qui rend le problème sans dimension : $Y = \frac{y}{w}$, $X = \frac{xD}{w^2 v_0}$. Alors,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D}{w^2 v_0} \frac{\partial c}{\partial X}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{w} \frac{\partial c}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \quad \text{La concentration } c(X, Y) \text{ vérifie l'équation } \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \text{ et les}$$

conditions aux limites $\frac{\partial c}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \frac{\partial c}{\partial Y} \Big|_{Y=1} = 0$, $c(0, Y) = 0$ si $Y > 0$ et $c(0, Y) = c_0$ si $Y < 0$.

Pensons au problème analogue : un tube infini est initialement dans l'état $c(x, 0) = 0$ si $x > 0$ et $c(x, 0) = c_0$ si

$x < 0$; trouver $c(x, t)$ pour $t > 0$. La solution de $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ avec ces conditions aux limites est une fonction affine

de $\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right)$, où $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy$.

En faisant correspondre à t X et à x Y , par analogie, la solution à notre problème de diffusion convective prend une valeur critique pour $\text{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{4XD}}\right) = \frac{1}{2}$, soit $Y = \sqrt{XD}$. Par conséquent, d_y correspond donc environ à $Y = \sqrt{XD}$, soit $\frac{d_y}{w} = \sqrt{\frac{XD}{w^2 v_0}}$ ou $d_y(x) = \sqrt{\frac{x D}{v_0}}$.

Remarque : si, comme le propose l'énoncé, on admet que $d_y = f(x, D, v_0)$, la démarche 1 exposée dans la remarque préliminaire à ce corrigé montre que $d_y = k x^a \frac{D}{v_0^{1-a}}$, où $0 < a < 1$, puisque d_y doit être fonction croissante de x et D ; mais cette démarche ne permet pas de déterminer plus précisément a .

II.2.5. Il suffit d'observer la limite de la partie colorée et d'exploiter la formule précédente pour une vitesse adaptée. La mesure de D dépend alors d'une seule observation, alors que la mesure d'un temps nécessite beaucoup plus d'observations sur une durée qui peut être importante, la diffusion étant un phénomène lent.