# Chapitre 11
# Probabilités

## I. Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire le résultat. L'**ensemble fondamental** (ou **univers**) d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est en général noté Ω. Il peut être fini, dénombrable, ou infini non dénombrable. Chaque élément ω de Ω est une réalisation de l'expérience, nommée aussi **issue** ou **événement élémentaire**.

**Exemple 1**

- On lance un dé, on s'intéresse au chiffre obtenu. L'ensemble fondamental est fini.

$$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$$

- On jette une pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir une fois « face ». L'ensemble fondamental est alors infini dénombrable

$$\Omega = \{F; PF; PPF; PPPF; PPPPF \ldots\}$$

- On choisit au hasard un point sur une demi-droite et on regarde la distance entre ce point et l'origine de la demi-droite. L'ensemble fondamental est infini non dénombrable

$$\Omega = [0; +\infty[$$

Pour chaque expérience, on peut définir des **événements** réalisés par une, plusieurs ou même aucune issue.
Un événement réalisé par **aucune issue** est un **événement impossible**.
Un événement réalisé par **toutes les issues** est un **événement certain**.

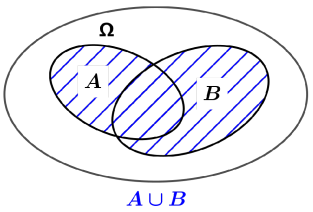
**Exemple 2**

On lance un dé à 6 faces et on regarde le résultat indiqué sur la face supérieure.
« Tirer un nombre pair » (événement A) est un événement lié à cette expérience. $A = \{2; 4; 6\}$
« Tirer un nombre » (événement B) est un événement **certain**. $B = \Omega$
« Ne tirer aucun nombre » (événement C) est un événement **impossible**. $C = \emptyset$

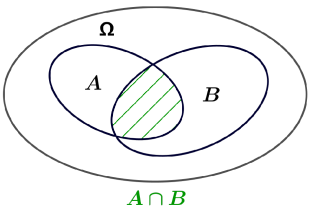
**Exemple 3**

On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes à jouer et on regarde la hauteur et la couleur de la carte. On considère les événements suivants :
**A** « On tire un valet »
**B** « On tire un cœur ou un carreau »
**L'intersection** des événements A et B est l'événement « On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ».
On note cet événement $A \cap B$ et on lit « **A inter B** »
La **réunion** des évènements A et B est l'événement « On tire le valet de pique, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet évènement $A \cup B$ et on lit « **A union B** »

**Définition 1**
L'événement $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont **simultanément réalisés**.
L'événement $A \cup B$ est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.



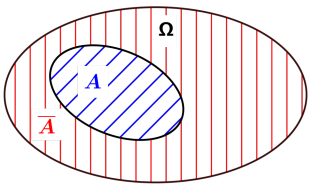
$A \cup B$



$A \cap B$

**Deux événements** sont **INCOMPATIBLES** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.
Autrement dit, deux événements $A$ et $B$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$
**Deux événements** sont **CONTRAIRES** s'ils sont incompatibles et si leur réunion est l'univers tout entier. Autrement dit, deux événements $A$ et $B$ sont contraires si

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = \Omega$$




On note alors $A = \Omega \backslash B = \overline{B}$ ($\Omega \backslash B$ se lit « Ω **privé de** $B$ » et $\overline{B}$ se lit « $B$ **barre** »)
Le **diagramme de Venn** (mathématicien anglais 1834-1923) ci-contre permet de visualiser un événement et son contraire dans l'univers Ω.

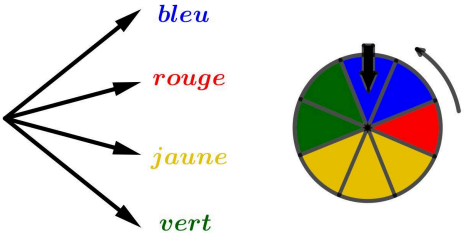
**Exemple 4**
Reprenons l'exemple d'un lancer de dé où l'on regarde le résultat obtenu.
« Tirer 1 » et « tirer un nombre pair » sont des événements **incompatibles**.
« Tirer un nombre pair » et « tirer un nombre impair » sont des événements **contraires**. On obtient bien l'un ou l'autre.

## II. Probabilité d'un événement

### 1. Arbre des possibles

**Exemple 5**
L'expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue et à regarder la couleur indiquée par la flèche : quatre issues sont possibles.

$$\Omega = \{bleu\ ;\ rouge\ ;\ jaune\ ;\ vert\}$$




On la schématise sur **l'arbre des possibles** (ou **arbre des probabilités**).
L'**arbre des possibles** permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire et leur probabilités associées.

### 2. Définition d'une probabilité

**Définition 2**
Une **probabilité** sur un univers $\Omega$ est une application de l'ensemble des événements de $\Omega$ (appelé tribu de $\Omega$) dans $R$ vérifiant :

- Pour tout événement $A \subset \Omega,\ 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \subset \Omega, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Remarque**
Si l'ensemble $\Omega$ est **fini** et si **chaque issue est équiprobable**, alors

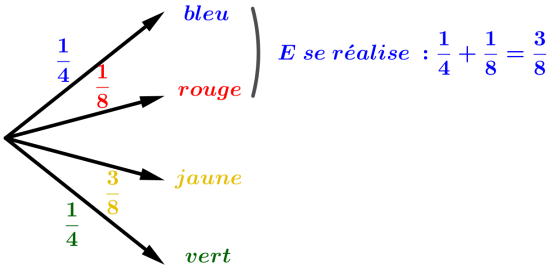
$$\forall A \subset \Omega,\ P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

**Exemple 6**
On reprend l'exemple précédent en supposant que la probabilité que la flèche s'arrête sur chaque secteur est égale. Ainsi, La **loi de probabilité** de cette expérience est donnée par le tableau suivant.

| **Issue** | Bleu | Rouge | Jaune | Vert |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

On inscrit alors sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.
Soit l'événement ***E*** « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ». On pourrait se demander quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?
On dit que la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est égale à 3/8 et on note

$$P(E) = \frac{3}{8}$$




**Méthode**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/5ZNYG3e2g_k**
On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on regarde la hauteur et la couleur de la carte. Soit $E$ l'évènement : « On tire un as ».
*Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?*
**Solution**
Il y a 32 issues possibles car il existe 32 cartes différentes. L'événement $E$ possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique. La probabilité que l'événement $E$ se réalise est donc égale à

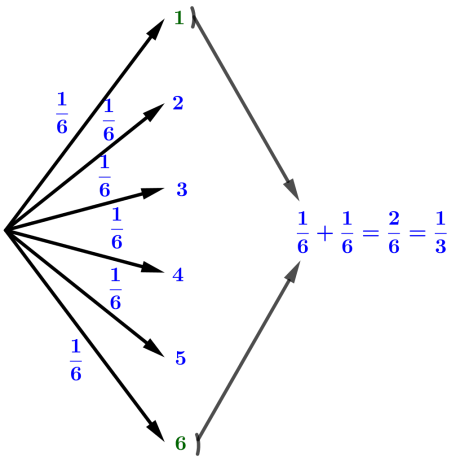
$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

**Méthode**

**Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles**

On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus. Soit $E$ l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

*Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?*




**Solution**

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire. Chaque issue à la même probabilité, 1/6. On dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Ainsi

$$P(E) = \frac{1}{3}$$

La probabilité que l'évènement $E$ se réalise est de 1/3

## 3. Événements contraires

**Propriété 1**

La probabilité de l'**événement contraire** $\overline{E}$ d'un événement $E \subset \Omega$ égale $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

**Preuve**

$E \cap \overline{E} = \emptyset$ donc, d'après la définition 2,

$$P(E \cup \overline{E}) = P(\Omega) = 1 = P(E) + P(\overline{E}) \Leftrightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

## 4. Probabilité d'une réunion ou d'une intersection

**Formule du crible (ou de Poincaré)**

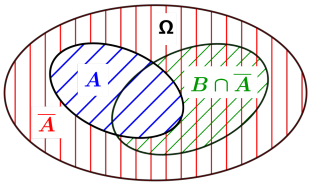
Soient $A, B \subset \Omega$ sont deux événements.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

**Preuve**

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$$




Or, les événements $A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles donc, d'après la définition 2,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$$

Par ailleurs,

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

Et

$$(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$$

donc, d'après la définition 2,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \Leftrightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$$

On en déduit que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

**Méthode**

Calcul de probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/y4P_BP-ldxk**

On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus. On considère les événements suivants :

$A$ : « On obtient un nombre impair »

$B$ : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

**Solution**

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \; et \; P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$A \cap B$ est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc

$$P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

## 5. Formule des probabilités totales

**Formule des probabilités totales**

Si deux événements A et B sont deux événements, alors $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

**Preuve**

$A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont deux événements incompatibles.

$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$$

De plus,

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

D'après définition 2, la propriété 2 est alors démontrée.

**Exemple 7**

Dans une classe, on choisit un élève au hasard. On sait que la probabilité que ce soit une fille est de 0,6 et que ce soit une fille qui porte des lunettes est de 0,24. Quelle est la probabilité de choisir une fille qui ne porte pas de lunettes ?

**Solution**

$$P(F \cap \overline{L}) = P(F) - P(F \cap L) = 0,6 - 0,24 = 0,36$$

La probabilité que ce soit une fille qui ne porte pas de lunettes est de 0,36.

**Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/aVXgUHx6ICA**

## 6. Probabilités conditionnelles

**Définition 3**

Soit deux événements $A$, $B \subset \Omega$, $B \neq \emptyset$. La probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est donnée par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Remarques**

- $B \neq \emptyset \Leftrightarrow P(B) \neq 0$
- Concrètement, les probabilités conditionnelles sachant $B$ reviennent à restreindre l'univers à $B$ : les propriétés des probabilités usuelles sont donc respectées. notamment,

$$P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$$

  Il en va de même de la formule du crible.
- Cette définition implique l'égalité dont on se sert fréquemment (notamment lorsque l'expérience est constituée de plusieurs épreuves)

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

- Soient $A$, $B \neq \emptyset$,

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \neq P_B(A)$$

sauf si $P(A) = P(B)$. On verra en terminale la **formule de Bayes** qui permet de les lier

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)\times P_B(A)}{P(A)}$$

- Si l'ensemble $\Omega$ est **fini** et si **chaque issue est équiprobable**, alors
$$\forall A\subset\Omega,\ P_B(A) = \frac{card(A\cap B)}{card(B)}$$

- Soient $A, B\subset\Omega, B\neq\emptyset$, la formule des probabilités totales peut ainsi s'écrire
$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\overline{B}) = P(B)\times P_B(A) + P(\overline{B})\times P_{\overline{B}}(A)$$

## 7. Expérience aléatoire à deux épreuves

Lorsque l'on reproduit plusieurs fois la même expérience aléatoire, on parle d'une expérience aléatoire à plusieurs épreuves. Si les épreuves sont indépendantes, c'est-à-dire que le résultat d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, la probabilité d'un événement élémentaire sera obtenu par le **produit des probabilités** de chaque épreuve. Si les épreuves ne sont pas indépendantes, on utilisera la notion de probabilité conditionnelle et la formule des probabilités totales.

### Méthode (cas indépendant)

Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves.

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/gFnCzFIjtqk**

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit $E$ l'événement « On obtient au moins une fois la face PILE ». Calculer $P(E)$.

### Solution

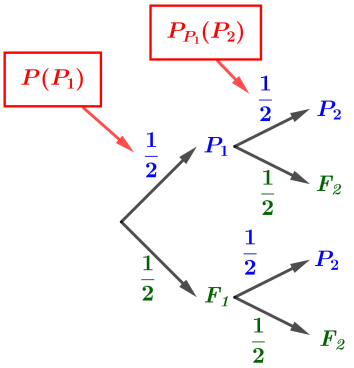
Notons

$P_1$ : « on obtient pile au premier lancer »

$F_1$ : « on obtient face au premier lancer »

$P_2$ : « on obtient pile au deuxième lancer »

$F_2$ : « on obtient face au deuxième lancer »




Remarquons que

$$E = (P_1\cap P_2)\cup(P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)$$

$P_1\cap P_2, P_1\cap F_2, F_1\cap P_2$ sont des événements incompatibles. Donc

$$P(E) = P(P_1\cap P_2) + P(P_1\cap F_2) + P(F_1\cap P_2) P(E) = P(P_1)\times P_{P_1}(P_2) + P(P_1)\times P_{P_1}(F_2) + P(F_1)\times P_{F_1}(P_2)$$

Or, les deux lancers sont indépendants donc

$$P_{P_1}(P_2) = P(P_2) = \frac{1}{2}\ P_{P_1}(F_2) = P(F_2) = \frac{1}{2}\ P_{F_1}(P_2) = P(P_2) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$P(E) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

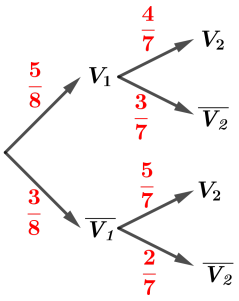
### Remarques

- Pour obtenir la probabilité de $P_1\cap P_2$, il suffit de **multiplier** les probabilités sur le chemin $P_1P_2$. La première correspond à $P(P_1)$ et la seconde à $P_{P_1}(P_2)$.
- $P_1 = \overline{F_1}\ P_2 = \overline{F_2}$

### Exercice (cas dépendant)

Dans une urne, on dispose de 5 boules vertes et 3 boules rouges. On tire au hasard deux boules successivement et sans remise (les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage) et on regarde la couleur des 2 boules tirées.
On note
$V_1$ : « on obtient une boule verte au premier tirage »
$V_2$ : « on obtient une boule verte au deuxième tirage »

**1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte ?**
Notons $A$ cet événement.




$P(A) = P\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) + P\left(\overline{V_1} \cap V_2\right) = P\left(V_1\right) \times P_{V_1}\left(\overline{V_2}\right) + P\left(\overline{V_1}\right) \times P_{\overline{V_1}}\left(V_2\right) P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} =$

**Remarque**
Dans ce cas, $P\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) = P\left(\overline{V_1} \cap V_2\right)$

**2. Quelle est la probabilité de ne tirer aucune boule rouge ?**

$$P\left(V_1 \cap V_2\right) = P\left(V_1\right) \times P_{V_1}\left(V_2\right) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{2\times4} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

**3. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?**

$$P\left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right) = P\left(\overline{V_1}\right) \times P_{\overline{V_1}}\left(\overline{V_2}\right) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{2\times4} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

**Autre méthode**

$$P\left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right) = 1 - P(A) - P\left(V_1 \cap V_2\right) = 1 - \frac{15}{28} - \frac{5}{14} = \frac{28}{28} - \frac{15}{28} - \frac{10}{28} = \frac{3}{28}$$

## Exercice 2

Reprendre les questions de l'exercice précédent en supposant que les tirages sont réalisés avec remise.

## Exercice 3

On considère une population atteinte en partie par une maladie et qui effectue un test pour vérifier si elle est porteuse de la maladie. On tire une personne au hasard et on regarde si elle est malade et si son test est positif.
On note
M : « La personne est porteuse de la maladie »
T : « Le test réalisé sur la maladie est positif, c'est-à-dire que le test affirme que la personne est malade. »

**1.** Que signifie concrètement $P_T(M)$ et $P_M(T)$ ?

$P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

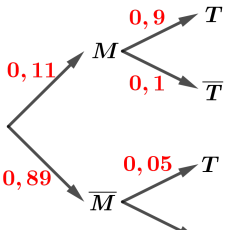
$P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.

**2.** On sait que

$$P(M) = 0,11 \; P_M(T) = 0,9 \; P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,8455$$

Calculer $P(\overline{M})$ puis $P_{\overline{M}}(\overline{T})$

$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,11 = 0,89$



$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{T})}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}8455}{0{,}89} = 0{,}95$

**3.** Tracer l'arbre des possibles en reportant les probabilités manquantes sans justifier.

**Remarque**

On aurait pu commencer l'arbre avec $T$ au lieu de $M$ mais l'énoncé ne nous donnait pas suffisamment d'indications.

**4.** Que représente $P_T(\overline{M})$ et $P_M(\overline{T})$ ?

$P_T(\overline{M})$ est la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif (faux positif).

$P_M(\overline{T})$ est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne est malade (faux négatif).

5. Calculer $P(M \cap T)$, $P(T)$ puis $P_T(M)$. Que peut-on en déduire ?

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}11 \times 0{,}9 = 0{,}099$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}099 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}099 + 0{,}89 \times 0{,}05 = 0{,}099 + 0{,}0445 = 0{,}1435$$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}099}{0{,}1435} \approx 0{,}69 \approx \frac{69}{100}$$

On peut déduire que 69% des personnes présentant un test positif sont réellement malades.

## Exercice 4

Au travail, on a distingué 3 groupes $A$, $B$, $C$ et on a regardé combien pratiquaient un sport ou non. On a consigné les effectifs dans le tableau croisé ci-dessous.

| | $A$ | $B$ | $C$ | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| $S$ | 5 | 2 | 3 | 10 |
| $\overline{S}$ | 3 | 8 | 4 | 15 |
| **Total** | 8 | 10 | 7 | 25 |

On tire une personne au hasard et regarde à quel groupe elle appartient et si elle pratique un sport ou non.

**1.** Quelle est la probabilité que cette personne appartienne au groupe $B$ et qu'elle pratique un sport ?

$$P(B \cap S) = \frac{card(B \cap S)}{card(\Omega)} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

**2.** Quelle est la probabilité que cette personne pratique un sport ?

$$P(S) = \frac{card(S)}{card(\Omega)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

**3.** Quelle est la probabilité que cette personne appartienne au groupe $B$ sachant qu'elle pratique un sport ?

$$P_S(B) = \frac{card(B \cap S)}{card(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

**4.** On tire deux personnes au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes appartiennent au groupe $B$ et qu'elles pratiquent un sport ?

L'expérience aléatoire s'apparente à un tirage sans remise à deux épreuves. Notons $E$ cet événement et

$T_1 = B_1 \cap S_1$ : « La première personne appartient au groupe $B$ et pratique un sport. »

$T_2 = B_2 \cap S_2$ : « La deuxième personne appartient au groupe $B$ et pratique un sport. »

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) = P(B \cap S) \times \frac{1}{24} = \frac{2}{25} \times \frac{1}{24} = \frac{2}{25} \times \frac{1}{2 \times 12} = \frac{1}{25 \times 12} = \frac{1}{300}$$