



Universidad
Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a .

Resolución

Para $x \neq 0$, f es continua independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Para que sea continua en $x = 0$: $f(0) = f(x) \Rightarrow a = f(x) = \frac{e^{2 \cdot 0} - 1}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicando la regla de L'Hôpital: $\frac{[e^{2x}-1]'}{(x)'} = \frac{2e^{2x}}{1} = 2e^{2 \cdot 0} = 2 \Rightarrow a = f(x) = 2$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ para todo valor de a y continua en $x = 0$ sólo para $a = 2$

(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

Resolución

Para $a = 1$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Si $x \neq 0$, es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables y $f'(x) = \frac{2e^{2x}x - (e^{2x}-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2e^{2x}x - e^{2x} + 1}{x^2}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$.

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{2e^{2 \cdot 1} - e^{2 \cdot 1} + 1}{1^2} = e^2 + 1 ; f(x_0) = f(1) = \frac{e^{2 \cdot 1} - 1}{1} = e^2 - 1.$$

La recta tangente es $rtg: y = (e^2 + 1)(x - 1) + e^2 - 1 \Rightarrow rtg: y = (e^2 + 1)x - 2$

$$y = (e^2 + 1)x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{e^2 + 1} ; \text{ para } x = 0, y = (e^2 + 1)0 - 2 = -2$$

Los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY son $\left(\frac{2}{e^2+1}, 0\right)$ y $(0, -2)$

2. Calcula justificadamente el siguiente límite $\left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right]$

Resolución

$L = \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right] = +\infty - (+\infty)$ Indeterm. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$L = \frac{\left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+5} + (x+2)\right]}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \frac{(\sqrt{x^2+5})^2 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \frac{1-4x}{\sqrt{x^2+5} + x+2}$$

Dividimos numerador y denominador entre x:

$$L = \frac{\frac{1}{x} - \frac{4x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{x} - 4}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}} = \frac{0-4}{\sqrt{1+0} + 1+0} = \frac{-4}{2} = -2$$

3.

(a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función $f(x) = ax + b \sin x \cos x + c$ sea una primitiva de $g(x) = \sin^2 x$. (Nota: Recuerda que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$)

Resolución

Si $f(x)$ es una primitiva de $g(x)$, entonces $f'(x) = g(x)$.

$$a + b(\cos^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - 2\sin^2 x) = a + b - 2b\sin^2 x = g(x) = \sin^2 x$$

De aquí, debe ser $\{a + b = 0 \quad -2b = 1\}$. Luego, $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$, c puede ser cualquier valor real

(b) (0,8 puntos) Sabiendo que $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, demuestra que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Resolución

Como $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, derivando, $2\cos(2x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

Simplificando entre 2 se tiene $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

4. Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

Resolución

Si x, y son las dimensiones del rectángulo, $2x + 2y = P$. Luego, $y = \frac{P}{2} - x$

Se trata de maximizar la función área, $A(x) = xy = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = \frac{P}{2}x - x^2$;

$$A'(x) = \frac{P}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P}{4}$$

$$A''(x) = -2; A''\left(\frac{P}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{para } x = \frac{P}{4}, \text{ el área es máxima. En tal caso, } y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

Luego, es un cuadrado porque $x = y = \frac{P}{4}$

5. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = A^t B + I_2$

(a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n} , con $n \in \mathbb{N}$.

Resolución

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{2,1} = (-1 \ 2 \ 2 \ 1)(-1 \ 2 \ 2 \ 1) = (5 \ 0 \ 0 \ 5) = 5I_2 \quad C^{2,2} = C^2 C^2 = 5I_2 \ 5I_2 = 5^2 I_2. \text{ En general, } C^{2n} = 5^n I_2$$

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $CX = 5(A^t B)$.

Resolución

Del a) sabemos que $C^2 = 5I_2 = 5I$. Multiplicamos la ecuación matricial, por la izquierda, por C y obtenemos $CCX = C5(A^t B) \Rightarrow C^2 X = 5CA^t B \Rightarrow 5IX = 5CA^t B$. Dividiendo entre 5, tenemos $X = CA^t B$

La solución es,

$$X = (-1 \ 2 \ 2 \ 1)(-2 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1)(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0) = (4 \ -2 \ -2 \ -3 \ 4 \ -1)(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0) \Rightarrow X = (6 \ -$$

6. Dada la matriz $A = (2 \ -3 \ 4 \ -4 \ 6 \ m \ -6 \ 2 \ -3 \ m \ +6)$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

Resolución

$$\det A = 12m + 72 - 6m + 36 + 48 - 48 + 6m - 36 - 12m - 72 = 0. \text{ Luego } \operatorname{rg} A < 3$$

$$\text{Sea el menor } |2 \ 4 \ -4 \ m \ -6| = 2m - 12 + 16 = 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

- Si $m \neq -2$, el menor $|2 \ 4 \ -4 \ m \ -6| \neq 0$ y $\operatorname{rg} A = 2$

- Si $m = -2$, $A = (2 \ -3 \ 4 \ -4 \ 6 \ -8 \ 2 \ -3 \ 4)$ $f_2 = -2f_1 \ f_3 = f_1 \ (2 \ -3 \ 4)$. Por tanto, $\operatorname{rg} A = 1$

(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $AX = 0$ cuando $m = 6$.

Resolución

Cuando $m = 6$, sabemos que $\operatorname{rg} A = 2$.

$m = 6$, las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (2 \ -3 \ 4 \ -4 \ 6 \ 0 \ 2 \ -3 \ 12)$ y

$$A^* = (2 \ -3 \ 4 \ 0 \ -4 \ 6 \ 0 \ 0 \ 2 \ -3 \ 12 \ 0)$$

Por ser un sistema homogéneo $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$$A^* = (2 \ -3 \ 4 \ 0 \ -4 \ 6 \ 0 \ 0 \ 2 \ -3 \ 12 \ 0) \ f_2 : 2 \ f_3 - f_1 \ (2 \ -3 \ 4 \ 0 \ -2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0) \ f_2 + f_1 \ (2 \ -3 \ 4$$

que corresponde al sistema $\{2x - 3y + 4z = 0 \ z = 0 ; 2x - 3y = 0 ; x = \frac{3y}{2}\}$. Llamando $y = k$, las infinitas

soluciones son $\{x = \frac{3k}{2} \ y = k \ z = 0\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4%; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21%. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación

y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Resolución

Sean x, y, z los precios sin IVA de los artículos A (primera necesidad), B (de alimentación) y C (pequeño electrodoméstico), respectivamente. Según el enunciado,

$\{1x + 2y + 5z = 483 \quad 100 \cdot 0,04x + 10 \cdot 0,1y + 100 \cdot 0,21z = 1954 \quad z = 4x + 8y \Rightarrow \{x + 2y + 5z = 483 \quad 4x + y + 21z = 1954 \quad 4x + 8y - z = 0\}$. Usemos el método de Gauss:

$A^* = (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 4 \ 1 \ 21 \ 1954 \ 4 \ 8 \ -1 \ 0) \quad f_2 - 4f_1 \quad f_3 - f_1 \quad (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 0 \ -7 \ 1 \ 22 \ 0 \ 0 \ 21 \ 1932) \quad :21 \quad (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 0 \ -7 \ 1 \ 22 \ 0 \ 0 \ 1 \ 92) \quad \text{que corresponde}$

al sistema $\{x + 2y + 5z = 483 \quad -7y + z = 22 \quad z = 92 \quad ; y = \frac{z-22}{7} = \frac{92-22}{7} = 10 \quad ; x = 483 - 2y - 5z = 483 - 2 \cdot 10 - 5 \cdot 92 = 3$

Como los precios sin IVA son $x = 3$ €, $y = 10$ €, $z = 92$ €, los precios a la venta son:

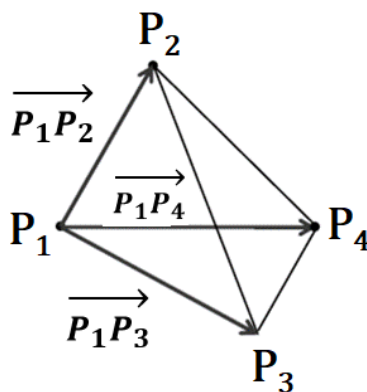
A (4% de IVA): $3 \cdot 1,04 = 3,12$ € ; B (10% de IVA): $10 \cdot 1,1 = 11$ € ; C (21% de IVA): $92 \cdot 1,21 = 111,32$ €

8. Dados los puntos $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, a, -2)$, $P_3(-1, 1, -1)$ y $P_4(1, 3, -3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen $\frac{1}{3}$.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Resolución



a)

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{6} V_{\text{paralel.}} \left(\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1P_4} \right) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{P_1P_2} & \vec{P_1P_3} & \vec{P_1P_4} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| -6a + 6 - 6 + 8 + 4a - 4 \right| = \frac{1}{6} \left| 4 - 2a \right| \Rightarrow |4 - 2a| = 2 \Rightarrow 4 - 2a = 2 \vee 4 - 2a = -2 \Rightarrow a = 1 \vee a = 3$$

b) Serán coplanarios sólo si $\det \begin{pmatrix} \vec{P_1P_2} & \vec{P_1P_3} & \vec{P_1P_4} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow |4 - 2a| = 0$. De donde, $a = 2$

9. Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Resolución

(a) Como de 54 alumnas matriculadas, aprueban en 1ª convocatoria 28 alumnas, el porcentaje de alumnas que se pide es $\frac{28}{54} \cong 0,5185 = 51,85\%$; y como de 45 alumnas matriculados, aprueban en 1ª convocatoria 21 alumnos, el porcentaje de alumnos que se pide es $\frac{21}{45} \cong 0,4667 = 46,67\%$

b) De 49 aprobados 28 son alumnas, la probabilidad que se pide es $\frac{28}{49} \cong 0,5714 = 57,14\%$

10. Vamos a suponer que, durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Resolución

A = llegar en avión B = llegar en tren C = llegar en autobús D = llegar en barco V = visitar Aragón

Según el enunciado, $p(A) = 55\% = 0,55$ $p(B) = 30\% = 0,3$ $p(C) = 10\% = 0,1$ $p(D) = 5\% = 0,05$

$p(V/A) = 50\% = 0,5$ $p(V/B) = 60\% = 0,6$ $p(V/C) = 100\% = 1$ $p(V/D) = 20\% = 0,2$

a) Pide $p(V)$, que por el teorema de probabilidad total es

$$p(V) = p(A) p(V/A) + p(B) p(V/B) + p(C) p(V/C) + p(D) p(V/D) = 0,55 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 1 + 0,05 \cdot 0,2$$

Operando, $p(V) = 0,565 = 56,5\%$

$$b) p\left[\frac{(B \cup C)}{V}\right] = \frac{p[(B \cup C) \cap V]}{p(V)} = \frac{p[(B \cap V) \cup (C \cap V)]}{p(V)} = \frac{p(B \cap V) + p(C \cap V)}{p(V)} =$$

$$= \frac{p(B)p(V/B) + p(C)p(V/C)}{p(V)} = \frac{0,3 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 1}{0,565} \cong 0,4956 = 49,56\%$$