CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

II – DẠNG TOÁN

4. Dạng 4: Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

a) Phương pháp giải.

- *Phương trình mặt phẳng* (P) đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
- Phương trình mặt phẳng có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C (khác gốc O) sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $3x+6y+2z+18=0$ **B.** $6x+3y+2z-18=0$ **C.** $6x+3y+2z+9=0$ **D.** $2x+y+3z-9=0$

Lời giải

Chọn đáp án B

Gọi ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ với $abc\neq 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Để $G(1;\ 2;\ 3)$ là trọng tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases}\frac{a}{3}=1\\ \frac{b}{3}=2\\ \frac{c}{3}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases}\Rightarrow(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0.$$

<u>Cách giải nhanh:</u> phương trình mặt phẳng có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$G(x_0;\ y_0;\ z_0)\Rightarrow a=3x_0=3;b=3y_0=6;c=3z_0=9.$

PT: $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $H(2;1;1)$ và cắt các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $2x+y+z-6=0$ **B.** $2x+y+z+6=0$ **C.** $2x-y+z+6=0$ **D.** $2x+y-z+6=0$

Lời giải

Chọn đáp án A

Gọi ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ với $abc\neq 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Để $H(2;\ 1;\ 1)$ là trực tâm ΔABC, điều kiện là:

$$\begin{cases} HA\perp BC \\ HB\perp AC \\ H\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b-c=0 \\ 2a-c=0 \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=c=6\end{cases}.$$

Thay $a,\ b,\ c$ vào (1), ta được: $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+y+z-6=0$.

__Cách giải nhanh:__ phương trình mặt phẳng có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$H(x_0;\ y_0;\ z_0)$ suy ra mặt phẳng (P) đi H và nhận $\overrightarrow{OH}=(x_0;y_0;z_0)$ làm vectơ pháp tuyến.

PT: $(P):2(x-2)+1(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+y+z=-6.\ \Leftrightarrow 2x+y+z-6=0$.

Giải theo tự luận

Giải theo pp trắc nghiệm(Giải theo Casio nếu có).

Phân tích các sai lầm dễ mắc phải của học sinh

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;\ 1;\ 1)$ và cắt chiều dương các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x-y-z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $x+y+z-3=0$ **D.** $x+y-z+3=0$

Lời giải

Chọn đáp án C

Gọi ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$ với $a,b,c>0$, khi đó phương trình có dạng:

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Điểm M thuộc (P) nên ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$: $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}a.b.c$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$$

Do $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ nên suy ra $abc\ge 27\Rightarrow \frac{1}{6}abc\ge\frac{9}{2}$.

V_{OABC} đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$ khi $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=3$

Khi đó $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow x+y+z-3=0$

b) Bài tập vận dụng có chia mức độ

NHẬN BIẾT.

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(-3;0;0),B(0;4;0),C(0;0;-2)$ là:

A. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$ **B.** $\frac{x}{-3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$ **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$ **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$ có phương trình là:

A. $-2x+y+z-2=0$ **B.** $-2x-y-z+2=0$ **C.** $-2x+y-z-2=0$ **D.** $-2x+y-z+2=0$

THÔNG HIỂU.

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5;4;3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=0$ **B.** $12x+15y+20z+60=0$

C. $12x+15y+20z-60=0$ **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}-60=0$

Hướng dẫn giải

Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox,Oy,Oz.

Ta có: $M(5;0;0)$, $N(0;4;0)$, $P(0;0;3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua $M(5;0;0)$, $N(0;4;0)$, $P(0;0;3)$ là:

$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 12x+15y+20z-60=0$.

Vậy $12x+15y+20z-60=0$.

VẬN DỤNG.

Câu 4: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x+2y+3z-14=0$ **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}-1=0$

C. $3x+2y+z-10=0$ **D.** $x+2y+3z+14=0$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$.

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$ **B.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$

C. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=0$ **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=0$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất có phương trình là:

A. $6x+3y+2z=0$ **B.** $x+y+z-6=0$

C. $6x+3y+2z-18=0$ **D.** $x+2y+3z-14=0$

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (P) qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$ suy ra $a=3,b=6,c=9$.

Phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ hay $6x+3y+2z-18=0$.

VẬN DỤNG CAO (NẾU CÓ)

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $(b>0,c>0)$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Xác định b và c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

A. $b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$ **B.** $b=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $b=1,c=\frac{1}{2}$ **D.** $b=\frac{1}{2},c=1$

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow bcx+cy+bz-bc=0$

Theo giả thiết: $\begin{cases}(ABC)\perp(P)\\ d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c-b=0\\ \frac{|-bc|}{\sqrt{(bc)^2+c^2+b^2}}=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=c\\ \frac{b^2}{\sqrt{b^4+2b^2}}=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow 3b^2=\sqrt{b^4+2b^2} \Leftrightarrow 8b^4=2b^2 \Leftrightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5;4;3)$ và cắt các tia $Ox,\ Oy,\ Oz$ các đoạn bằng nhau có phương trình là:

A. $5x+4y+3z-50=0$ **B.** $x+y+z=0$

C. $x-y+z=0$ **D.** $x+y+z-12=0$

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0;0),B(0;a;0),C(0;0;a)$ $(a\neq 0)$ là giao điểm của mặt phẳng (α) và các tia $Ox,\ Oy,\ Oz$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua $A,\ B,\ C$ là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$.

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(5;4;3)\Rightarrow a=12$

Ta có $\frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=1 \Leftrightarrow x+y+z-12=0$

Câu 9: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P):x-y-z+1=0$ **B.** $(P):x+y-z+1=0$

C. $(P):x+y+z-3=0$ **D.** $(P):x+2y+z-4=0$

Hướng dẫn giải:

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox,Oy,Oz

$\Rightarrow (P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$

Ta có:

$$\begin{cases} N \in (P) \\ NA = NB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \\ |a-1|=|b-1| \\ |a-1|=|c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=3 \Rightarrow x+y+z-3=0$$