

О Т В Е Т Ы
второго этапа (районного, городского)
республиканской олимпиады
по математике
для учащихся 8 – 11 классов
учреждений образования Витебской области
(2014-2015 учебный год)

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ

При проверке и оценивании работ учащихся жюри руководствуется следующими критериями оценки:

1. Решение каждой задачи оценивается **7 баллами**. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Все оценки должны быть **целыми** числами. Задача считается решенной, если решение оценено не ниже, чем в 5 баллов и нерешенной, если оценка не превосходит 3 баллов. Оценка в 4 балла может толковаться по-разному, в зависимости от конкретной ситуации.

2. Оценки выставляются на основе следующих критериев:

Оценка в баллах	Критерии оценки
7	Верное решение
6	Верное решение с недочетами
5	Решение в целом верно, но неполно или содержит принципиальные ошибки
4	Рассуждения содержат большую часть решения, но в них есть существенные пробелы или ошибки
1 – 3	Решения в целом нет, но есть более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается **неполным**, если:

- оно содержит все необходимые идеи, но не доведено до конца;
- оно в целом верное, но содержит более или менее легко устранимые пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;
- оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых рассмотрена, но некоторые, аналогичные рассмотренным, упущены.

3. При оценке решения на олимпиаде учитываются только его *правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за нерациональность решения (кроме редких случаев, когда это прямо предусмотрено указаниями по проверке задачи), нетиповое его оформление, исправления, пометки и т.п.

4. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических. К последним относятся, например, вычислительные ошибки в невычислительной задаче (алгебраические ошибки в вычислительной задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, как правило, следует относить к недочетам.

5. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Однако не следует требовать от них большего уровня строгости изложения, чем принято в школьной практике. На олимпиаде умение хорошо *догадываться* должно цениться выше, чем умение хорошо излагать решение.

6. Ответ, найденный логическим путем, обычно оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

1. Ответ: 12.

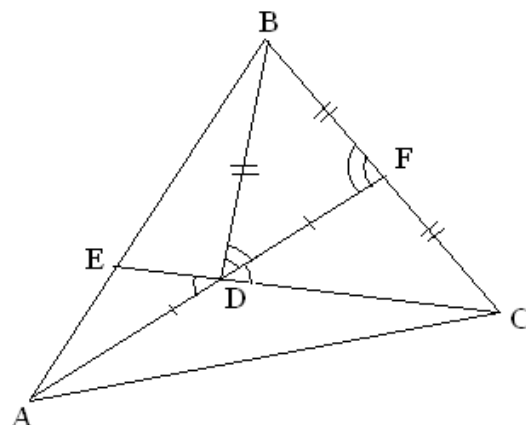
Решение: Мальчики и девочки чередуются, но при этом мальчиков в классе больше. Значит, мальчиков на 1 больше, чем, девочек. Поэтому шеренга начинается и кончается мальчиком. Приходим к уравнению

$$\frac{x}{2x-1} = 0.52, \quad \text{где } x - \text{количество мальчиков.}$$

Решая данное уравнение, находим, что $x = 13$, т.е. мальчиков. Следовательно, девочек 12.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше. Поэтому $\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}$ и $\frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}$. Отсюда следует, что $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

3. Требуется доказать, что треугольник EAD равнобедренный. Для этого достаточно проверить, что $\angle EAD = \angle EDA$. А так как $\angle EDA = \angle FDC$, то докажем, что $\angle EAD = \angle FDC$. Заметим, что треугольник DBF равнобедренный. Значит, $\angle BDF = \angle BFD$. Тогда $\angle ADB = \angle DFC$. Теперь мы видим, что треугольники ADB и DFC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle EDA = \angle FDC$, что и требовалось доказать.



4. Способ I. Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)-d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда $b+d \equiv a(b+d) \pmod{p}$.

Следовательно, $(a-1)(b+d) \equiv 0 \pmod{p}$. Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a-1$ или $b+d$ делится на p . Но оба этих числа меньше p , и при этом $a > 1$, (так как $a > b \geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

Способ II. (Удачное разложение). Из условия следует, что $(b-1)(a-1) = ab - a - b + 1 = cd + c + d + 1 = (c+1)(d+1)$.

Поэтому найдутся такие натуральные числа u_1, u_2, v_1, v_2 , что $a-1 = u_1 u_2$, $b-1 = v_1 v_2$, $c+1 = u_1 v_1$ и $d+1 = u_2 v_2$. Тогда $a+c = u_1 u_2 + u_1 v_1 = u_1(u_2 + v_1)$. Чтобы доказать, что $a+c$ составное, достаточно проверить, что $u_1 \neq 1$. Предположим, что $u_1 = 1$. Тогда $a-1 = u_2$, $c+1 = v_1$ и $a+c = u_2 + v_1 \leq v_1 v_2 + u_2 v_2 = b+d$, что противоречит условию.

Способ III. Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)-d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$-(b+d)+a(b+d) = (a+c)+d(a+c)$ или $(b+d)(a-1) = (a+c)(1+d)$. Тогда правая часть делится на $a+c=p$, т.е. и $(b+d)(a-1)$ делится на p .

Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a-1$ или $b+d$ делится на p . Но оба этих числа меньше p , и при этом $a > 1$, (так как $a > b \geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

5. Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (CFH) , (BDE) , (DEG) , (ACF) .

Решение. Покрасим вершины A, C, F, H , в красный цвет, а остальные вершины – в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в 1 вершину другого цвета.

Сделаем первый залп по вершинам C, F, H .

Если заяц находился в красной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A . В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (DEG) , а потом (ACF) обязательно поразят зайца.

9 класс

1. Ответ: наименьшее значение равно 1 (равенство достигается при $a=0$).

Решение: Пользуясь известным неравенством $x + \frac{1}{x} \geq 2$, справедливым для всех положительных чисел, заключаем, что

$$a^{2014} + a^4 + \frac{1}{a^4 + 1} \geq a^4 + \frac{1}{a^4 + 1} = (a^4 + 1) + \frac{1}{a^4 + 1} - 1 \geq 2 - 1 = 1.$$

2. Ответ: за 365 дней.

Решение: Если обозначить через v объем воды в озере, через w – объем воды, поступающий за сутки из родников, а через z – объем воды, выпиваемой в сутки одним слоном, то условие задачи можно записать в виде системы двух уравнений $v+w=183z$, $v+5w=5 \cdot 37z$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим, что $4w=2z$, значит, $v=365w$. Пусть один слон выпивает озеро за x дней, тогда $v+xw=xz$. Подставляя $z=2w$, получим $v=xw$. Но мы уже знаем, что $v=365w$, поэтому слон осушит озеро за 365 дней, после чего понадобится еще два года, чтобы озеро вновь наполнилось из родников.

3. Способ I. Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)-d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$$b+d \equiv a(b+d) \pmod{p}.$$

Следовательно, $(a-1)(b+d) \not\equiv p$. Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a-1$ или $b+d$ делится на p . Но оба этих числа меньше p , и при этом $a > 1$, (так как $a > b \geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

Способ II. (Удачное разложение). Из условия следует, что

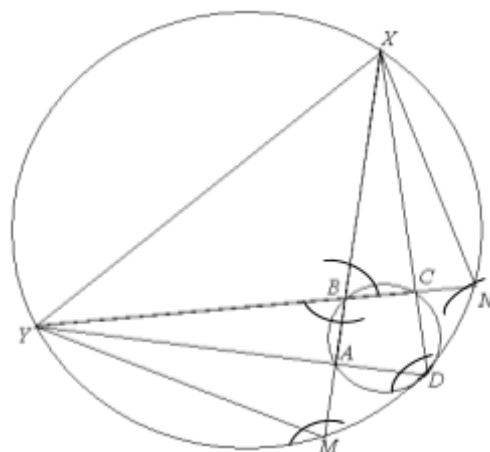
$$(b-1)(a-1) = ab - a - b + 1 = cd + c + d + 1 = (c+1)(d+1).$$

Поэтому найдутся такие натуральные числа u_1, u_2, v_1, v_2 , что $a-1 = u_1 u_2$, $b-1 = v_1 v_2$, $c+1 = u_1 v_1$ и $d+1 = u_2 v_2$. Тогда $a+c = u_1 u_2 + u_1 v_1 = u_1(u_2 + v_1)$. Чтобы доказать, что $a+c$ составное, достаточно проверить, что $u_1 \neq 1$. Предположим, что $u_1 = 1$. Тогда $a-1 = u_2$, $c+1 = v_1$ и $a+c = u_2 + v_1 \leq v_1 v_2 + u_2 v_2 = b+d$, что противоречит условию.

Способ III. Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)-d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда $-(b+d)+a(b+d) = (a+c)+d(a+c)$ или $(b+d)(a-1) = (a+c)(1+d)$. Тогда правая часть делится на $a+c=p$, т.е. и $(b+d)(a-1)$ делится на p .

Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a-1$ или $b+d$ делится на p . Но оба этих числа меньше p , и при этом $a > 1$, (так как $a > b \geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

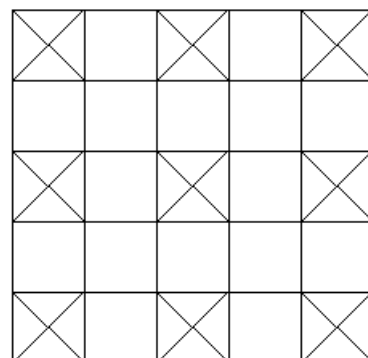
4. Решение. На хорду XY опираются равные углы $\angle YMX$, $\angle YDX$, $\angle YNX$. Кроме того, в силу вписанности четырехугольника $ABCD$ равны углы $\angle YBM$, $\angle XBN$, $\angle YDX$. Таким образом, в треугольниках MYB и BXN есть пары равных углов. Следовательно, они равнобедренные. Тогда $NX + MY = YB + XB > XY$.



5. Ответ: 128 диагоналей.

Решение. Достаточно провести по две диагонали в клетках $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}, a_{13}, a_{15}, c_1, c_3, c_5, \dots, e_1, e_3, e_5, \dots$

Докажем, что диагоналей не может быть больше 128. Квадрат 15×15 содержит $16^2 = 256$ углов сетки. Поскольку концы диагоналей не пересекаются и у каждой диагонали 2 конца, количество диагоналей не превосходит $256/2 = 128$.



10 класс

1. Ответ: В школе 17 педагогов.

Решение: Пусть после перевода имелось m штатных педагогов, их суммарная зарплата равна $47m$ млн. рублей, и n внештатных педагогов с суммарной зарплатой $13n$ млн. рублей. Пусть зарплата педагога переведенного во внештатные, составляла x млн. рублей.

Ситуация до перевода описывается уравнениями

$$\frac{47 \cdot m + x}{m + 1} = 45, \quad \frac{13 \cdot n - x}{n - 1} = 11$$

Умножив первое уравнение на $m+1$, второе на $n-1$ и сложив, получим $2 \cdot (m+n) = 34$, т.е. $m+n=17$.

2. Решение: Пусть точка P лежит на дуге AC описанной окружности треугольника ABC ; A_1 , B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC , CA и AB . Сумма углов при вершинах A_1 и C_1 четырёхугольника A_1BC_1P равна 180° , поэтому

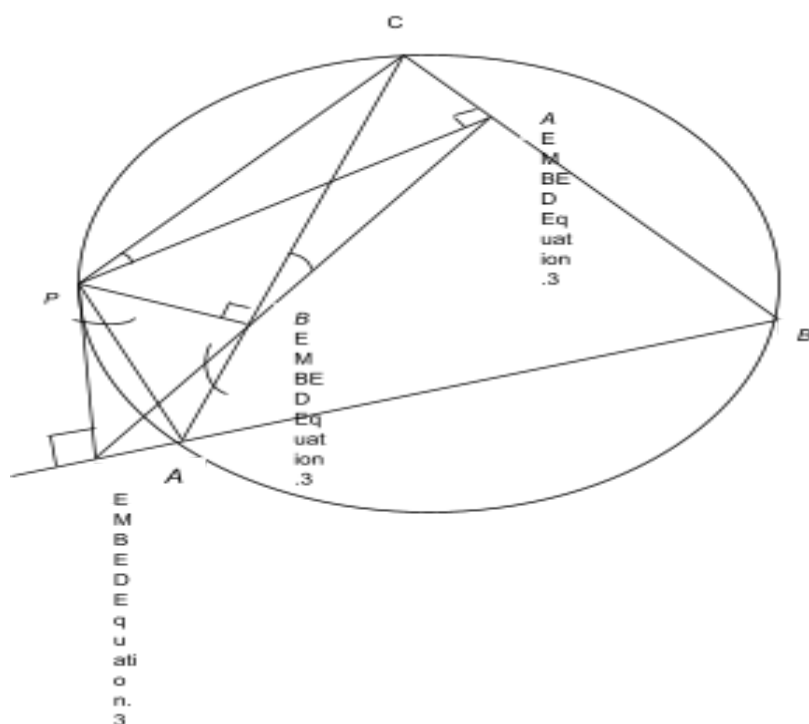
$\angle A_1PC_1 = 180^\circ - \angle B = \angle APC$. Следовательно, $\angle APC_1 = \angle A_1PC$, причем

одна из точек A_1 или C_1 (например A_1) лежит на стороне треугольника, а другая на продолжении стороны.

Четырёхугольники AB_1PC_1 и A_1B_1PC можно вписать в окружность, поэтому

$\angle AB_1C_1 = \angle APC_1 = \angle A_1PC = \angle A_1B_1C$, а значит, точка B_1 лежит на отрезке A_1C_1 .

Если точка P совпадает с одной из вершин треугольника, то доказательство очевидно.



3. Решение: К левой и правой части равенства $56a = 65b$ прибавим $56b$. Получим $56 \cdot (a+b) = 121b$. Так как $\text{НОД}(56, 121) = 1$, то $(a+b) \mid 121$. Это означает, что $a+b$ – составное число.

4. Ответ: -11

Решение: Способ I. Пусть для определенности трехчлен $f(x)$ – неотрицательный, a – его корень. Тогда часть данного уравнения неотрицательна и равенство возможно, только если

$2x - 3 = 3x + 1 = a$. Отсюда находим $x = -4$, $a = -11$.

Способ II. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Можно считать $a=1$. В противном случае поделим все коэффициенты трехчлена на a , от этого не изменятся ни его корни, ни корни уравнения

$f(2x-3) + f(3x+1) = 0$. По условию трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень, значит, его дискриминант равен нулю, т.е. $b^2 = 4c$. Выражение $g(x) = f(2x-3) + f(3x+1)$ также представляет собой квадратный трёхчлен $g(x) = (2x-3)^2 + b(2x-3) + c + (3x+1)^2 + b(3x+1) + c = 13x^2 + (5b-6)x + (10-2b+2c) = 13x^2 + (5b-6)x + (20-4b+b^2)/2$.

Он также имеет ровно один корень, следовательно, и его дискриминант равен нулю. Таким образом,

$$0 = (5b-6)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (20-4b+b^2)/2 = b^2 - 44b + 484.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно b , оно имеет единственное решение $b=22$. Стало быть $c = (b/2)^2 = 121$ и $f(x) = x^2 + 22x + 121$. Единственным корнем трехчлена $f(x)$ является число -11 .

5. Решение:

Способ I. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ – это написанные на доске натуральные числа (в порядке возрастания). Поскольку среди них нет равных, из полученных 55 чисел самое маленькое – это a_1 , самое большое – это сумма всех. Следовательно, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 54$ и числа на доске – это просто 1, 2, ..., 10. Заметим, что единица должна стоять с краю, иначе не может получиться сумма 54. Аналогично с краю должна стоять и двойка ибо нам надо также получить и сумму 53. Далее надо получить сумму 51, поэтому рядом с единицей должна стоять тройка. Но тогда невозможно получить сумму 50.

Способ II. Аналогично устанавливаем, что на доске написаны числа 1, 2, ..., 10. Поскольку всего возможных сумм 55 – столько же, сколько получившихся последовательных натуральных чисел, то все суммы должны быть различны. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим единицу. Рядом с ней может стоять только 10, поскольку если рядом будет число $n \leq 9$, то сумма чисел в паре с 1 и n равна $n+1 \leq 10$. А такую же “сумму” даёт и одиночное число $n+1$. Значит, единица стоит с краю и рядом с ней 10. Рассмотрим теперь двойку. По аналогичным причинам рядом с ней может стоять только 9 или 10. Но если рядом стоит 9, то в паре с двойкой получаем $2+9=11=1+10$, а такая сумма уже есть. Следовательно, двойка также стоит с краю и рядом с ней 10. Но это невозможно.

11 класс

1. Ответ: в учительской сидят 23 педагога

Решение:

Способ I. Пусть x педагогов пили чай, y – пили кофе, а возраст педагога Иван Ивановича равен s . Тогда суммарный возраст пьющих чай равен $22x$, а после присоединения к ним Ивана Ивановича – $22x+s$. Следовательно,

$\frac{22 \cdot x + s}{x + 1}$ – средний возраст пьющих чай (вместе с Иваном Ивановичем).

Таким образом, получаем уравнение $\frac{22 \cdot x + s}{x + 1} = 23$, или, $x = s - 23$.

Аналогично суммарный возраст пьющих кофе равен $45y$, а без Ивана

Ивановича – $45y - s$. Таким образом, получаем уравнение $\frac{45 \cdot y - s}{y - 1} = 46$ или, что тоже самое, $y = 46 - s$.

Стало быть, $x + y = (s - 23) + (46 - s) = 23$.

Способ II. (креветки).

Удобнее ввести рассуждения не с возрастaми, а с какими-нибудь штучными объектами. Допустим, что каждый педагог купил себе количество креветок, равное его возрастy. По условию, можно полагать, что пьющие кофе и пьющие чай поровну распределили своих креветок.

Итак, за большим столом сидят s педагогов, пьющих кофе, перед каждым педагогом стоит чашка кофе и тарелка с 45 креветками. И тут один из них, Иван Иванович, встает, забирает своих креветок и идет за другой стол! Оставшиеся за столом педагоги вдруг видят, что теперь перед каждым лежит не 45, а 46 креветок! Что такое, откуда? Оказывается Иван Иванович, взяв со своей тарелке всех своих креветок, обнаружил, что на тарелке остались $s - 1$ креветки, и он их по штучке разложил каждому сидящему за его столом.

Далее, подходит Иван Иванович к молодёжи, пьющей чай. Там за столом у педагогов, у каждого – чашка чая, тарелка с 22 креветками. Молодёжь удивилась, после прихода Ивана Ивановича у каждого на тарелке-то не 22 креветки, а 23. А это Иван Иванович оказывается, увидел, что креветок у него $22 + k + 1$ штук, и он по одной каждому из k педагогов подложил (и у самого Ивана Ивановича тоже как раз 23 креветки осталось).

Вот и получается, что $45 - (s - 1) = 22 + k + 1$, откуда $k + s = 23$.

2. Ответ: -11

Решение: Способ I. Пусть для определенности трехчлен $f(x)$ – неотрицательный, a – его корень. Тогда часть данного уравнения неотрицательна и равенство возможно, только если

$2x - 3 = 3x + 1 = a$. Отсюда находим $x = -4$, $a = -11$.

Способ II. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Можно считать, $a = 1$. В противном случае поделим все коэффициенты трехчлена на a , от этого не изменятся ни его корни, ни корни уравнения

$f(2x - 3) + f(3x + 1) = 0$. По условию трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень, значит, его дискриминант равен нулю, т.е. $b^2 = 4c$. Выражение $g(x) = f(2x - 3) + f(3x + 1)$ также представляет собой квадратный трехчлен $g(x) = (2x - 3)^2 + b(2x - 3) + c + (3x + 1)^2 + b(3x + 1) + c = 13x^2 + (5b - 6)x + (10 - 2b + 2c) = 13x^2 + (5b - 6)x + (20 - 4b + b^2)/2$.

Он также имеет ровно один корень, следовательно, и его дискриминант равен нулю. Таким образом,

$$0 = (5b-6)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (20-4b+b^2)/2 = b^2 - 44b + 484.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно b , оно имеет единственное решение $b=22$. Стало быть, $c = (b/2)^2 = 121$ и $f(x) = x^2 + 22x + 121$. Единственным корнем трехчлена $f(x)$ является число -11 .

3. Решение:

(в нашем случае
 BC не
параллельна HO)

Способ I

(подробное).

Точки C' , B' , A' –
середины сторон
 AB , AC и BC
треугольника

ABC . Рассмотрим
две медианы AA'
и BB' ,

пересекающиеся
в точке G , две
высоты $\triangle ABC$,

пересекающиеся
в точке H , и две

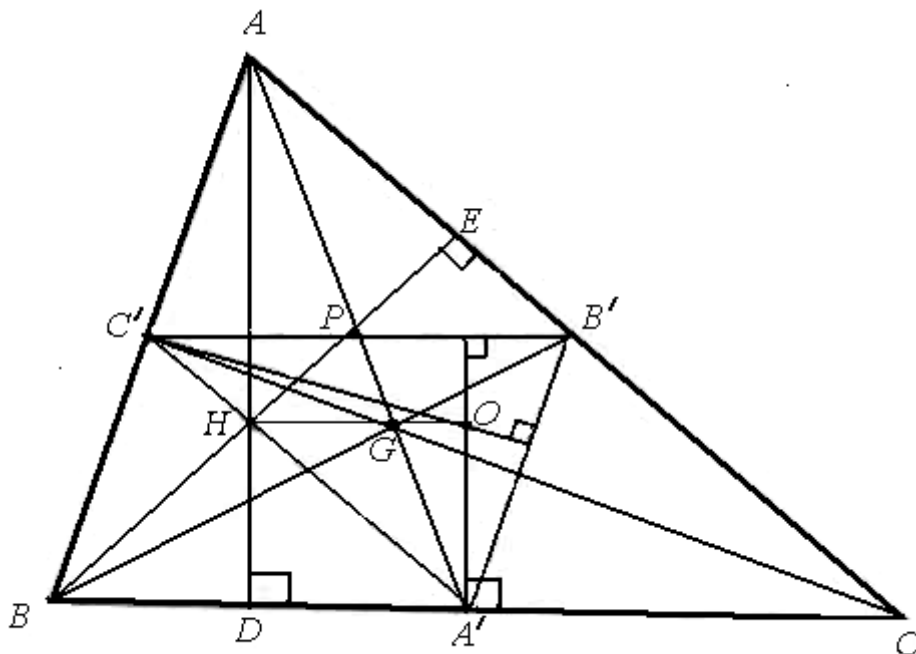
высоты $\triangle A'B'C'$, пересекающиеся в точке O .

$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $1/2$. Отрезки $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ разбивают $\triangle ABC$ на четыре равных треугольника. Точка P – середина отрезка $B'C'$ и является серединой отрезка AA' .

Не сложно доказать, что $AC'A'B'$ – параллелограмм. Следовательно, прямая AA' делит пополам отрезок $B'C'$. Поэтому медианы $\triangle A'B'C'$ на медианах $\triangle ABC$, а это означает, что оба треугольника имеют один и тот же центроид (точка пересечения медиан) G .

Высоты $\triangle A'B'C'$, изображенные нами на рисунке, являются серединными перпендикулярами сторон AB и BC $\triangle ABC$. Отсюда делаем вывод, что точка O – ортоцентр (точка пересечения высот) $\triangle A'B'C'$ – является в то же время и центром окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, т.к. точка H – ортоцентр $\triangle ABC$, а точка O – ортоцентр подобного ему $\triangle A'B'C'$, то $AH = 2OH$. Известно, что $AG = 2GA'$. И, наконец, так как оба отрезка AD и OA' перпендикулярны стороне BC , то они параллельны. Следовательно, $\angle HAG = \angle OA'G$, $\triangle HAG \sim \triangle OA'G$ и $\angle AGH = \angle A'GO$. Этим показано, что точки O , G , H коллинеарны (то есть лежат на одной прямой) и $HG = 2GO$.

Способ II. Пусть A' , B' , C' – середины сторон BC , CA и AB . Треугольники $A'B'C'$ и ABC подобные, причем коэффициент подобия равен 2. Высоты треугольника $A'B'C'$ пересекаются в точке O , поэтому $OA' : HA =$



1:2. Пусть G' – точка пересечения отрезков OH и AA' тогда $OG': G'H = OA':HA = 1:2$ и $AG': G'A' = OA':HA = 1:2$, т.е. $G' = G$.

4. Решение: Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел a_1 и a_2 :

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}. \text{ Положим в этом неравенстве } a \sin^2 \alpha = a_1, \frac{b}{\sin^2 \alpha} = a_2.$$

$$\text{Получим: } \frac{a \cdot \sin^2 \alpha + \frac{b}{\sin^2 \alpha}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{b}{\sin^2 \alpha}}, \text{ откуда } a \sin^2 \alpha + \frac{b}{\sin^2 \alpha} \geq 2 \sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать.

5. Решение: Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 (см. рис.1) и для любого расположения селедки рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых лежат данные нам 6 селедок (с учетом кратности).

Пример. Для расположения на рис. 2. $S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23$

Очевидно, что при сдвиге селедки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность. Значит, если сдвигаются одновременно две селедки, то четность величины S не меняется – она инвариантна. Но для расстановки на рис.1 $S = 21$. Если же все селедки находятся в одном секторе с номером A , то $S = 6 \cdot A$ – это четное число (а 21 – число нечетное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 селедок находятся в одном секторе.

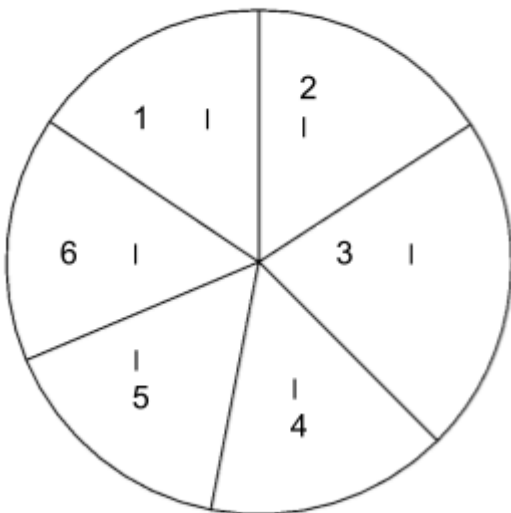


Рис.1

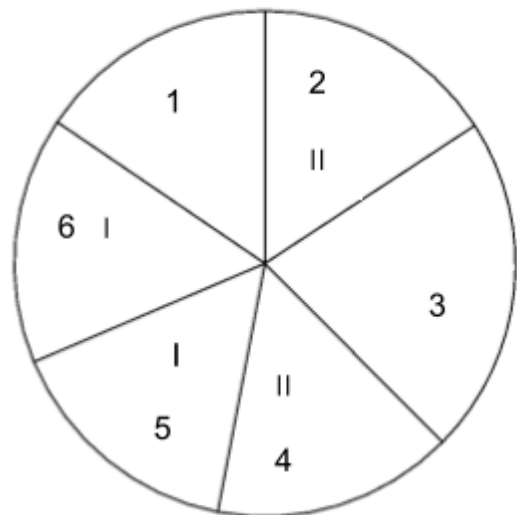


Рис.2