

Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Contrôle à posteriori de l'épreuve
Banque PT: MATHS I-A.

Partie 1

Question 1.

- a) Soit la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Pour $z = 1$, la série est divergente sans être grossièrement divergente. 1 appartient donc au cercle de convergence. Donc $R = 1$.
 On aurait pu dire également qu'en $z = -1$, la série était convergente sans être absolument convergente et conclure de la même façon.
 Bien sûr on pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert!
- b) Déjà évoqué à la question précédente: _____
 Divergence en $z = 1$ (série harmonique $\frac{1}{n}$).
 Convergence en $z = -1$ (série harmonique alternée $\frac{(-1)^n}{n}$ vérifiant le critère des séries alternées)

Question 2.

- a) Soit x réel, tel que $|x| < 1$. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
 $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ somme de la série géométrique de raison x . Rayon de convergence $R = 1$.

- b) Comme $S(0) = 0$, $S(x) = \int S'(t)dt = \int \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$.

Question 3.

Soit la série de terme général $u_p = -\frac{1}{2} \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}$.
 $u_p = \frac{-(3p+2)(3p+3) - (3p+1)(3p+3) + 2(3p+1)(3p+2)}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)} = -\frac{9p+5}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)}$
 u_p est de signe constant négatif, $u_p \sim -\frac{1}{6p^2}$ quand $p \rightarrow +\infty$, le théorème sur les séries de signe constant équivalentes s'applique, u_p est équivalente à une série de type Riemann convergente, elle est elle-même convergente.
 Soit la série de terme général $v_p = \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}$. $v_p = \frac{1}{(3p+1)(3p+2)}$ est de signe constant positif, $v_p \sim \frac{1}{9p^2}$. On conclut comme précédemment à la convergence de cette série.

Soit $z = e^{2i\pi/3} = j$.

On a : $j^{3p+1} = j$, $j^{3p+2} = j^2 = \bar{j}$, $j^{3p+3} = 1$ soit encore

$$j^{3p+1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^{3p+2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^{3p+3} = 1.$$

Considérons alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Comme le terme général tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, il est légitime de faire une sommation par paquets de trois termes consécutifs. On ne modifie pas la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence.

Soit donc $w_p = \frac{z^{3p+1}}{3p+1} + \frac{z^{3p+2}}{3p+2} + \frac{z^{3p+3}}{3p+3}$, $p \geq 0$.

$w_p = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}\right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}\right) = u_p + i \frac{\sqrt{3}}{2} v_p$ avec les notations précédentes.

La série de terme général w_p est donc convergente comme somme de deux séries convergentes.

conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{2i\pi/3}$.

Question 4.

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$ c'est à dire $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

$\sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{ip\theta} (1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(q-p)\theta}) = e^{ip\theta} \frac{1 - e^{i(q-p+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ expression que l'on transforme en

passant aux arcs moitié : $\sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{ip\theta} \frac{e^{i\frac{(q-p+1)\theta}{2}} \frac{-2i \sin(\frac{(q-p+1)\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{-2i \sin(\frac{\theta}{2})}}{e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{-2i \sin(\frac{\theta}{2})}}.$

conclusion: $\sum_{k=p}^q e^{ik\theta} = e^{i\frac{p+q}{2}\theta} \frac{\sin(\frac{(q-p+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$, θ fixé, alors $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ et **conclusion:** $\left| \sum_{k=p}^q e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}.$

c) Soit z un complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$; $z = e^{i\theta}$.

Posons $u_n = \frac{1}{n}$, u_n est le terme général d'une suite qui tend vers zéro telle que la série de terme général $\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ est une série convergente.

Posons $v_n = z^n$, on a bien que $\left| \sum_{k=p}^q v_k \right| \leq M = \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}.$

Les hypothèses du théorème admis sont réunies, la série de terme général $\frac{z^n}{n}$ est convergente.

conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Partie 2

$P = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ $F(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z).$

Question 1.

Pour $z \in P$, $e^{F(z)} = e^{\ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)} = z.$

Question 2.

Pour $z = x + iy$ $\{x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ on note $P(x, y) = \operatorname{Re}(F(z))$, $Q(x, y) = \operatorname{Im}(F(z)).$

a) $Q(x, y) = \text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ car par définition $\text{Arg}(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{y}{x} = \tan(\text{Arg}(z))$. **conclusion:** $Q(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.

b) $P(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ d'où :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \left(-\frac{y}{x^2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0.$$

conclusion: $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0.$

c) $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$

$$\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

d) Le théorème de Green-Riemann dit, pour (γ) bord orienté d'un compact D , (compact à gauche)

que $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ d'où ici:

$$\int P(x, y)dx - Q(x, y)dy = \iint \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint 0 dx dy = 0.$$

$$\int Q(x, y)dx + P(x, y)dy = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint 0 dx dy = 0.$$

Rq: On constate que l'orientation de (γ) n'a plus d'importance, puisque le résultat est nul.

Question 3.

a) Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \leq 1$ et si $\rho = 1$, $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Alors, $1 - z = (1 - \rho \cos \theta) - i \rho \sin \theta$.

$$\text{Re}(1 - z) = \{1 - \rho \cos \theta \text{ si } \rho < 1$$

$$1 - \cos \theta \text{ si } \rho = 1 \text{ mais alors avec } \cos \theta < 1$$

de sorte que $\text{Re}(1 - z) > 0$ dans

tous les cas et par suite :

conclusion: $1 - z \in P$ dès que z est différent de 1 et de module 1.

b) On admet, pour z ; $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$ que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -F(1 - z)$.

On a donc, en particulier pour $z = e^{i\theta}$ $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{n} = - \left[\ln(|1 - e^{i\theta}|) + i \text{Arg}(1 - e^{i\theta}) \right] \text{ d'où}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = - \text{Arg}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i \sin \frac{\theta}{2})\right). \text{ Or } \frac{\theta}{2} \in]0, \pi[\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ et par suite}$$

$$e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i \sin \frac{\theta}{2})$$

a pour module $2\sin\frac{\theta}{2}$ et pour argument possible $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$ qui appartient bien à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

On a donc $\text{Arg}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})\right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.

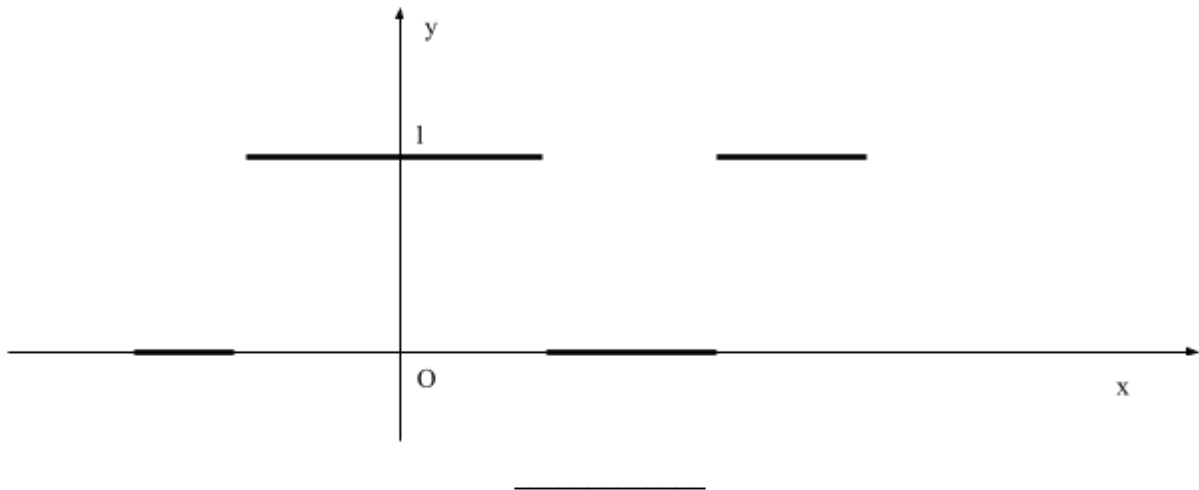
conclusion:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = -\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-\theta}{2} \text{ pour } \theta \in]0, 2\pi[.$$

Partie 3

Soit $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

a) Soit f de période 2π , paire, définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \theta[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \theta \\ 0 & \text{si } x \in]\theta, \pi] \end{cases}$$



b) Coefficients de Fourier de f :

Les b_n sont nuls puisque f est paire.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \cos nx dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\theta}{n} & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} & \text{pour } n = 0 \end{cases}.$$

conclusion: La série de Fourier de f est :
$$\frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \cos nx.$$

c) La fonction f est de classe C^1 par morceaux sur R , donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de f converge en tout point et a pour somme

$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Or on a en tout point de R , $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ de sorte que

conclusion:
$$\forall x \in R, f(x) = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \cos nx.$$

d) Pour $x = 0$ on obtient : $1 = \frac{\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ soit :

$$\text{conclusion: Pour } \theta \in]0, \pi[\quad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Maintenant, soit $\theta \in]\pi, 2\pi[$. Alors $-\theta \in]-2\pi, -\pi[$ et $2\pi - \theta \in]0, \pi[$. On peut donc appliquer la formule précédente en remplaçant θ par $2\pi - \theta$, d'où :

$$\text{pour } \theta \in]\pi, 2\pi[\quad , \quad \frac{\pi-(2\pi-\theta)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(2\pi-\theta)}{n} \text{ soit } \frac{\theta-\pi}{2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \text{ et finalement :}$$

$$\text{conclusion: pour } \theta \in]\pi, 2\pi[\quad , \quad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

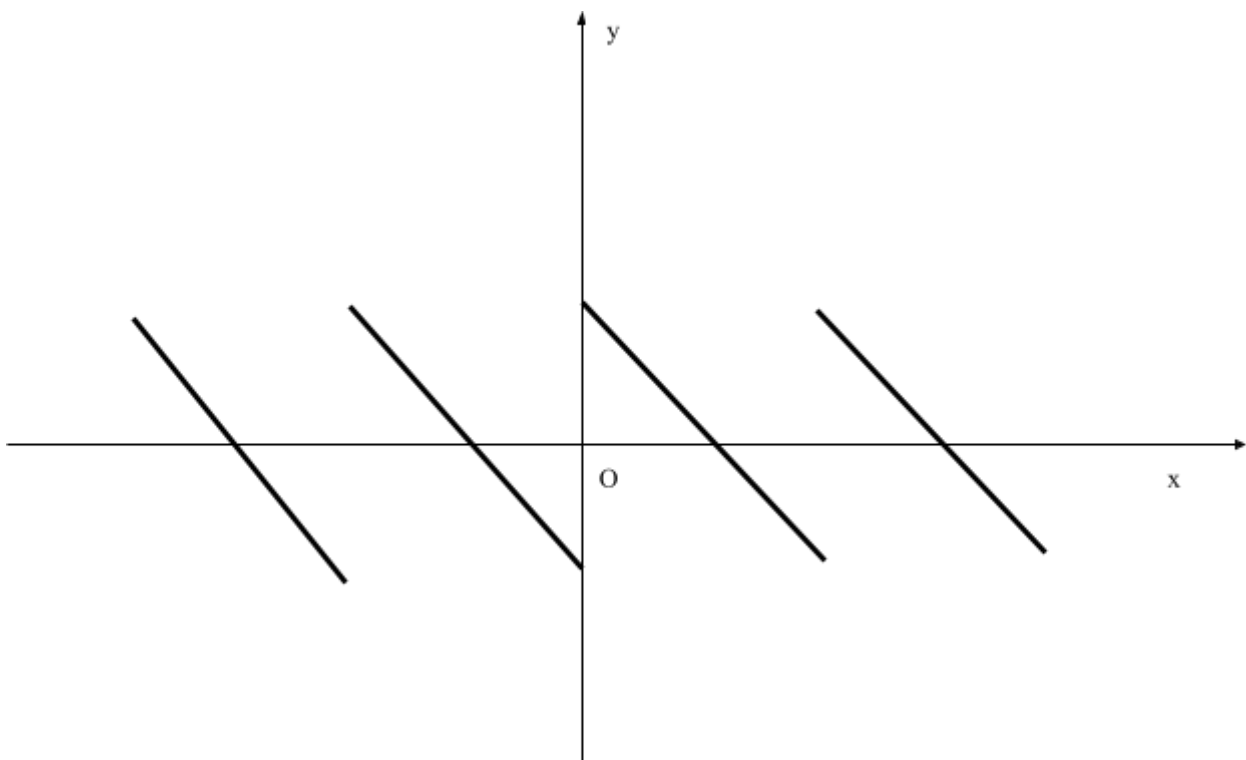
$$\text{et puisque la formule est aussi vraie pour } \theta = \pi, \text{ on a pour } \theta \in]0, 2\pi[\quad , \quad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Partie 4

Soit g de période 2π , telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = \frac{\pi-x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$.

Question 1.

a)



b) Coefficients de Fourier de g :

Les a_n sont nuls puisque la fonction est impaire.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx \text{ que l'on intègre par parties :}$$

$$\{u = \pi - x \quad u' = -1 \quad v' = \sin nx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \text{ d'où}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi-x}{n} \cos nx \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int \cos nx dx = \frac{1}{n}.$$

conclusion: La série de Fourier de g est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Question 2.

a) La fonction g est de classe C^1 par morceaux sur R , donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de g converge en tout point et a pour somme $\frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$. Or on a en tout point de R , $g(x) = \frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$ de sorte que

conclusion: $\forall x \in R, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Retenons en particulier que $\forall x \in]0, 2\pi[$, $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ et on retrouve le résultat de la partie 3.

b) Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a : $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$. Or $\sin \frac{2p\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = (-1)^p$

d'où **conclusion:** $\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

La formule de Parseval - Bessel donne : $2 \int \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'où :

conclusion: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{(\pi-x)^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}$.

Question 3.

a) $\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$ d'après 1.4.a. d'où

conclusion: $\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n+1}{2}\theta$ si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$

b) Pour x réel on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$. On a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx$ de sorte qu'on a pour

$$x \in]0, \pi[, S'_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2}x = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Comme $S_n(0) = 0$, on peut écrire que pour $x \in]0, \pi[$, $S_n(x) = \int S'_n(t) dt$, d'où :

conclusion: $\forall x \in]0, \pi[, S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt$.

Rq: La formule reste en fait valable pour $x \in]0, 2\pi[$.

c) Prolongement par continuité en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$.

On a $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} \sim \frac{\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{t}{6}$ au voisinage de 0. On peut donc prolonger par continuité par la valeur 0.

$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ étant continue par exemple sur $[0, 1]$, est bornée sur ce segment. Notons M un majorant de $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ sur $[0, 1]$, on a alors : $0 \leq \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \leq M$ sur $[0, 1]$.

$$\int \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \leq M h_n \text{ dès que } h_n \in [0, 1] \text{ et par suite :}$$

$$\text{conclusion: } \int \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty.$$

$$\int \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt = \int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2} \left[\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] dt \text{ et par suite :}$$

$$\left| \int \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \right) du \quad (u = \frac{t}{2})$$

$$\text{conclusion: } \int \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty.$$

d) Pour $x \in]0, \pi[$, $S'_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2}x$ et s'annule donc pour la première fois en

changeant de signe pour $\frac{n+1}{2}x = \frac{\pi}{2}$, soit en $x_n = \frac{\pi}{n+1}$.

x_n est 0 et $\rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. On peut donc écrire:

$$S_n(x_n) = -\frac{x_n}{2} + \int \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt + \int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \text{ et on a donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt. \text{ Posons alors } u = (n + \frac{1}{2})t \quad dt = \frac{du}{n + \frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \int \frac{\sin u}{\frac{u}{n + \frac{1}{2}}} \frac{du}{n + \frac{1}{2}} = \int \frac{\sin u}{u} du \text{ et enfin}$$

$$\text{conclusion: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) = \int \frac{\sin u}{u} du = L.$$

e) $\frac{\sin u}{u}$ est développable en série entière sous la forme $\frac{\sin u}{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$ $R = \infty$.

On peut donc intégrer terme à terme entre 0 et π , et on obtient :

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)!}. \text{ Cette série vérifie le critère des séries alternées et la}$$

décroissance du module à bien lieu à partir de $n = 1$.

$$\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(2n+1)\pi^2}{(2n+2)(2n+3)^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} < 1 \text{ pour } n \geq 1 \right).$$

$$\text{Dès lors, on sait que } |R_n| \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)!}.$$

On propose pour valeur approchée de L la valeur $U_4 = \sum_{k=0}^4 \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)!}$. Cette valeur sera à

coup sûr une valeur approchée de L avec une erreur 10^{-3} , si on peut garantir que

$$\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}. \text{ Or en effet, en utilisant } \pi^2 < 10 \text{ on a :}$$

$$\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < \frac{\pi 10^5}{(11)!(11)} < \frac{\pi 10^2}{9!} < \frac{\pi 10}{3.4.6.7.8.9} < \frac{32}{(4.8).3.6.7.9} = \frac{1}{1134}$$

conclusion: on a bien $\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}$.

FIN