

1.- (prueba extraordinaria)

a) Se desea tomar una muestra estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 45 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido 375 personas del primer estrato.

Resolución

Estratos	de 18 a 30	de 31 a 45	de 45 a 60	mayores de 60	Total
Número de elementos de la muestra	375	x	y	z	n
Número de elementos de la población	7500	8400	5700	3000	24600

Sea n el nº de elementos de la muestra, x, y, z el nº de elementos de los estratos 2, 3 y 4

Usando la proporcionalidad entre el número elementos de la muestra y de la población

$$\frac{375}{7500} = \frac{x}{8400} = \frac{y}{5700} = \frac{z}{3000} = \frac{n}{24600}$$

$$\frac{375}{7500} = \frac{x}{8400} \Rightarrow x = \frac{375 \cdot 8400}{7500} \Rightarrow x = 420. \quad ; \quad \frac{375}{7500} = \frac{y}{5700} \Rightarrow y = \frac{375 \cdot 5700}{7500} \Rightarrow y = 285.$$

$$\frac{375}{7500} = \frac{z}{3000} \Rightarrow z = \frac{375 \cdot 3000}{7500} \Rightarrow z = 150. \quad ; \quad \frac{375}{7500} = \frac{n}{24600} \Rightarrow n = \frac{375 \cdot 24600}{7500} \Rightarrow n = 1230.$$

Luego, el tamaño de la muestra es 1230 personas, 375 del primer estrato, 420 del segundo, 285 del tercero y 150 del cuarto.

b) Dada la población {2, 4, 6} construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

Resolución

Como en el muestreo aleatorio simple damos por hecho que las muestras se extraen con reemplazamiento, las muestras serían {2-2, 2-4, 2-6, 4-2, 4-4, 4-6, 6-2, 6-4, 6-6}.

Por el teorema central del límite la varianza de las medias muestrales es $\frac{\sigma^2}{n}$ siendo σ^2 la varianza de la población y n el tamaño de las muestras, en este caso n = 2.

Hallemos entonces la varianza de la población $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2$ siendo N el tamaño de la población, en este

caso N = 3 y μ la media de la población, $\mu = \frac{\sum x_i}{N}$

$$x_i \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad | \quad 12 \quad x_i^2 \quad 4 \quad 16 \quad 36 \quad | \quad 56 \quad \mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{12}{3} = 4, \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{56}{3} - 4^2 = \frac{8}{3}$$

Luego, la varianza de las medias muestrales es $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

También se podría haber calculado de forma directa sin usar el teorema central del límite:

Hallamos las medias de las muestras

$$\text{Muestras } 2-2 \quad 2-4 \quad 2-6 \quad 4-2 \quad 4-4 \quad 4-6 \quad 6-2 \quad 6-4 \quad 6-6 \quad \text{media} = x_i \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$x_i: 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \mid f_i: 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \mid m = 9 \quad x_i f_i: 2 \ 6 \ 12 \ 10 \ 6 \mid 36 \quad x_i^2 f_i: 4 \ 18 \ 48 \ 50 \ 36 \mid 156 \quad \mu = \frac{\sum x_i f_i}{m} = \frac{36}{9} = 4,$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{156}{9} - 4^2 = \frac{4}{3}$$

2.- (prueba ordinaria) El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg.

a) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?

Resolución

Sea la v.a. $X = \text{peso}$, $X \rightarrow N(65, 8)$. Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\bar{X}$ = media de las muestras de tamaño n , $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso $\mu = 65$, $n = 64$, $\sigma = 8$.

Sustituyendo, $\bar{X} \rightarrow N\left(65, \frac{8}{\sqrt{64}}\right) \cong N(65, 1)$

b) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

Resolución

En este caso, $\mu = 65$, $n = 100$, $\sigma = 8$. Sustituyendo, $\bar{X} \rightarrow N\left(65, \frac{8}{\sqrt{100}}\right) \cong N(65; 0, 8)$

Como $\bar{X} \rightarrow N(65; 0, 8)$ entonces la variable $Z = \frac{\bar{X} - 65}{0,8} \rightarrow N(0, 1)$

Nos piden $p(64 < \bar{X} < 65)$, restamos 65 y dividimos entre 0,8 en los tres miembros

$$p\left(\frac{64 - 65}{0,8} < \frac{\bar{X} - 65}{0,8} < \frac{65 - 65}{0,8}\right) = p(-1,25 < Z < 0) = p(0 < Z < 1,25).$$

$$p(64 < \bar{X} < 65) = p(Z < 1,25) - p(Z < 0) \quad \text{usando la tabla de la } N(0, 1) \rightarrow 0,8944 - 0,5 = 0,3944 =$$

3.-

a) La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser (164,86 ; 171,14) en cm.

Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.

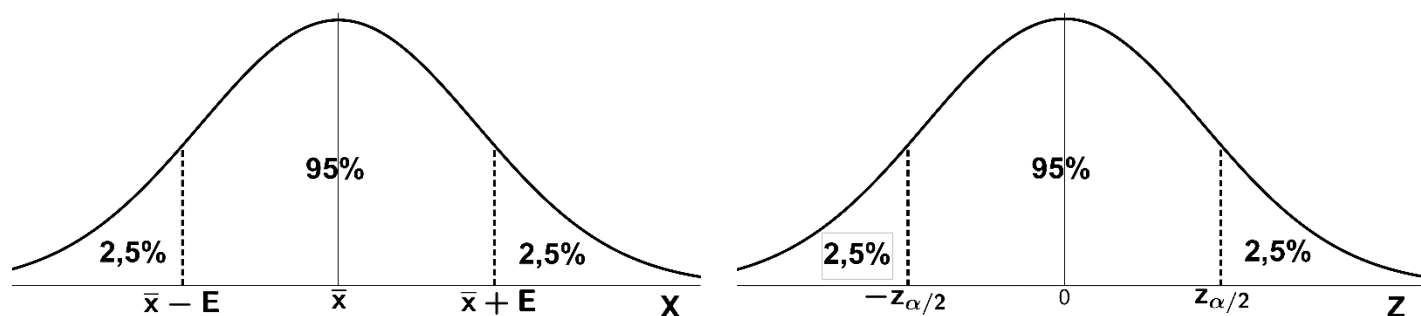
Resolución

Sea la v.a. $X = \text{talla}$, $X \rightarrow N(\mu, 8)$. El intervalo de confianza para la distancia media es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación, la media muestral es el punto medio del intervalo, $\sigma = 8$.

$$\bar{x} = \frac{164,86 + 171,14}{2} = \frac{336}{2} = 168. \text{ Luego, la talla media es } 168 \text{ cm}$$

El error de máximo, E, es la mitad de la longitud del intervalo. $E = \frac{171,14 - 164,86}{2} = \frac{6,28}{2} = 3,14$

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 95\% = 5\%$ y $5\% : 2 = 2,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Piden hallar n para que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3,14}{2} = 1,57 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{1,57} = \sqrt{n}$

Elevando al cuadrado, $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{1,57^2} = 1,96^2 \cdot \frac{8^2}{1,57^2} \cong 99,7$

Luego, el tamaño muestral mínimo debe ser 100.

b) En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?

Resolución

Sean x, y, z el nº de usuarios del club inscritos en Yoga, Pilates y Mantenimiento, respectivamente.

Usando la

	Yoga	Pilates	Mantenimiento	Total
Número de elementos de la muestra	5	7	15	27
Número de elementos del club	x	y	z	243

proporcionalidad entre el número elementos de la muestra y de la población

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{15} = \frac{243}{27} = 9.$$

$$\frac{x}{5} = 9 \Rightarrow x = 5 \cdot 9 = 45 \quad ; \quad \frac{y}{7} = 9 \Rightarrow y = 7 \cdot 9 = 63 \quad ; \quad \frac{z}{15} = 9 \Rightarrow z = 15 \cdot 9 = 135$$

Luego, en el club hay inscritos en 45 en Yoga, 63 en Pilates y 135 en Mantenimiento.

4.- (prueba ordinaria) Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2,5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18,5 14 16,5 19 20 20,5 17 18,5 18

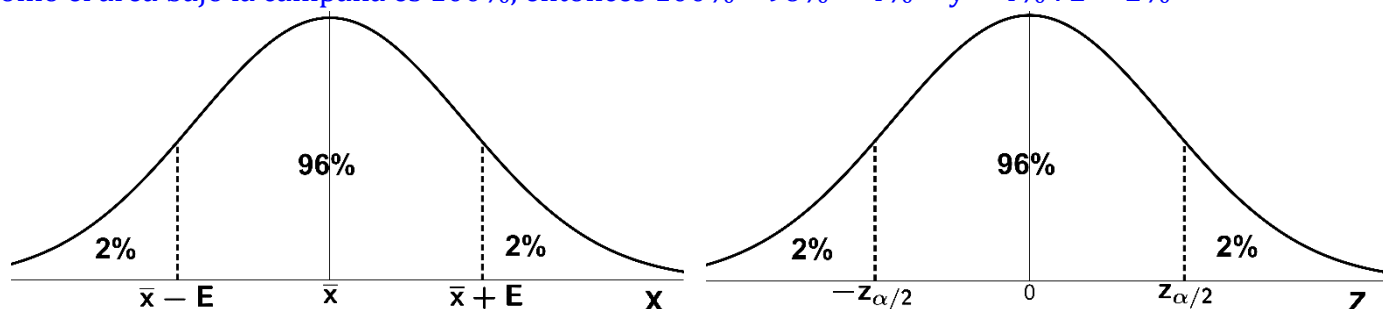
a) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.

Resolución

Sea la v.a. $X \rightarrow N(\mu; 2, 5)$. La desviación típica es $\sigma = 2,5$

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 96% para estimar μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 96\% = 4\%$ y $4\% : 2 = 2\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 96\% + 2\% = 98\% = 0,98$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,96}{2} = 0,98$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,98$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$.

El tamaño de la muestra es $n = 10$, la desviación típica es $\sigma = 2,5$

$$\bar{x} = \frac{18 + 18,5 + 14 + 16,5 + 19 + 20 + 20,5 + 17 + 18,5 + 18}{10} = \frac{180}{10} = 18.$$

$$\begin{aligned} \text{Sustituyendo, } E &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}} \cong 1,6246 ; \\ I_c &= (18 - 1,6246 ; 18 + 1,6246) \cong (16,4 ; 19,6) \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con esa estimación?

Resolución El error máximo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}} \cong 1,6246$

c) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

Resolución

Nos piden hallar n para que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sigma < \sqrt{n}$ elevando al cuadrado $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \sigma^2 < n$

Sustituyendo, $n > 2,055^2 \cdot 2,5^2 \cong 26,4$. Luego, el tamaño muestral mínimo debe ser 27.

5.- El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.

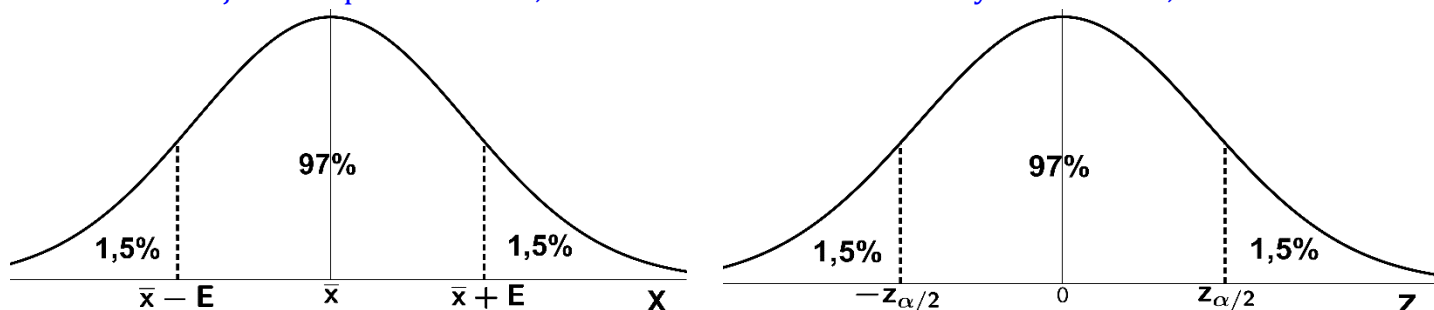
a) Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.

Resolución

Sea la v.a. $X = \text{peso}$, $X \rightarrow N(\mu, 16)$. La desviación típica es $\sigma = 16$

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 97% para el peso medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 97\% = 3\%$ y $3\% : 2 = 1,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 97\% + 1,5\% = 98,5\% = 0,985$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,97}{2} = 0,985$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,985$ usandolatabladelaN(0,1) $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$.

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}} = 3,472$;

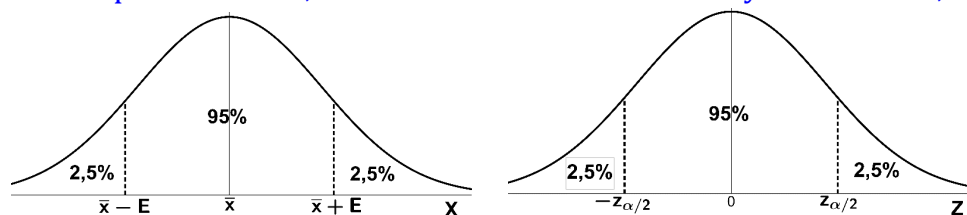
$I_c = (247 - 3,472 ; 247 + 3,472) \cong (243,5 ; 250,5)$

b) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0,5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.

Resolución

Sabemos que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es el máximo error de estimación, $\sigma = 16$

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 95\% = 5\%$ y $5\% : 2 = 2,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Nos piden hallar n para que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0,5 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{0,5} \leq \sqrt{n} \text{ elevando al cuadrado } \rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\sigma^2}{0,5^2} \leq n$$

Sustituyendo: $n \geq 1,96^2 \cdot \frac{16^2}{0,5^2} \cong 3934$. Luego, el tamaño mínimo de la muestra debe ser 3934.

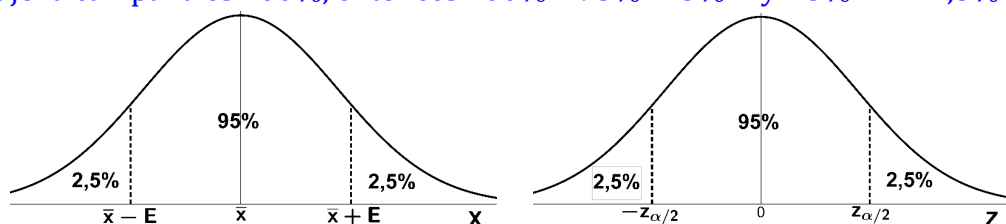
6.- Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes: 682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a) Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.

Resolución

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para estimar el número medio de personas que van al cine, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x}$ la media de una muestra de tamaño n , $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 95\% = 5\%$ y $5\% : 2 = 2,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

$$n = 10, \sigma = 50, \bar{x} = \frac{682 + 553 + 555 + 666 + 657 + 649 + 522 + 568 + 700 + 552}{10} = \frac{6104}{10} = 610,4.$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \cong 30,99 ; I_c = (610,4 - 30,99 ; 610,4 + 30,99) \cong (579,41 ; 641,39)$$

b) ¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

Resolución

El tamaño de la muestra es $n = 10$, la desviación típica es $\sigma = 50$; $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \cong 30,99$

7.- (prueba extraordinaria) Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.

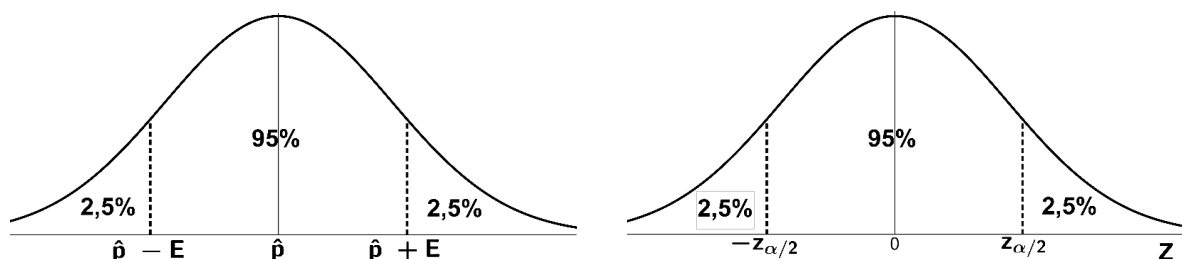
a) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.

Resolución

La v.a. “proporción de artículos de cada muestra, elegida al azar, que tienen defectos en su envoltorio”, tiene una distribución Normal $N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ donde p es la proporción del total de artículos, $n = 100$ el tamaño de la muestra y $\hat{p} = \frac{19}{2000} = 0,0095$ la proporción muestral.

El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para la proporción, p , es $I_c = (\hat{p} - E, \hat{p} + E)$, siendo $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 95\% = 5\%$ y $5\% : 2 = 2,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$.

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Sustituyendo: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,0095(1-0,0095)}{2000}} \cong 0,00425$.

$$I_c = (0,0095 - 0,00425 ; 0,0095 + 0,00425) = (0,00525 ; 0,01375).$$

Para interpretar el resultado multiplicamos los límites del intervalo (que son probabilidades) por los 2000 artículos, y nos dará al 95% de confianza entre que cantidad de artículos tienen defectuoso el envoltorio.

$2000 \cdot 0,00525 = 10,5$, consideramos 11 artículos ; $2000 \cdot 0,01375 = 27,5$, consideramos 28 artículos.

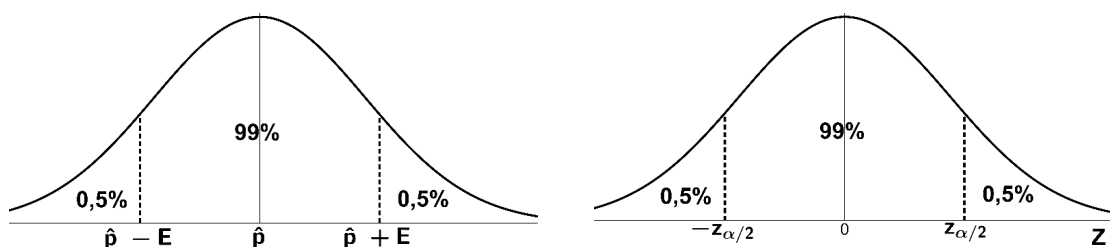
Es decir, al 95% de confianza, de los 2000 artículos puede haber entre 11 y 28 artículos con el envoltorio defectuoso.

b) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

Resolución

Sabemos que $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, es el máximo error de estimación, $\hat{p} = 0,0095$

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 99\% = 1\%$ y $1\% : 2 = 0,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 99\% + 0,5\% = 99,5\% = 0,995$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

Piden hallar n tal que

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 1\% = 0,01 \quad \text{elevando al cuadrado} \rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \leq 0,01^2$$

$$\text{Despejando, } n \geq (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{0,01^2} = 2,575^2 \cdot \frac{0,0095(1-0,0095)}{0,01^2} \cong 623,9.$$

Luego, deberíamos seleccionar como mínimo 624 artículos.

8.- En un artículo de internet se afirma que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40.

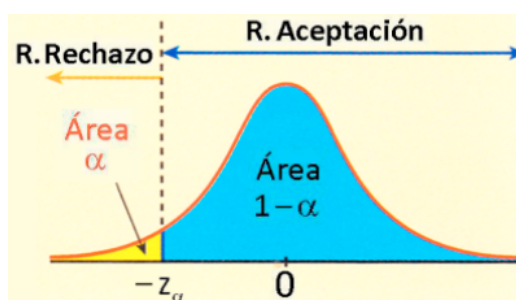
Para contrastar dicha información se elige una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se observa que envían una media de 38 mensajes al día. Se sabe que el número de mensajes enviados diariamente sigue una distribución Normal de desviación típica 2. Con un nivel de significación del 5% plantee un contraste, ($H_0: \mu \geq 40$), determine la región de rechazo y concluya si ¿se puede aceptar la afirmación del artículo de internet?

Resolución

Planteamos el contraste de hipótesis unilateral para la media, μ , de la variable aleatoria normal $X = n^\circ$ de mensajes de WhatsApp, $\{H_0: \mu \geq 40$ (hipótesis nula) $H_1: \mu < 40$ (hipótesis alternativa) ; $\mu_0 = 40$

Tamaño muestral $n = 100$; media muestral, $\bar{x} = 38$; desviación típica $\sigma = 2$.

$$\text{Estatístico de contraste } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{38 - 40}{\frac{2}{\sqrt{100}}} = -10.$$



Nivel de significación $\alpha = 5\% = 0,05$; nivel de confianza $n_c = 1 - \alpha = 0,95$

z_{α} es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha}) = 1 - \alpha = 0,95$

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación, obtenemos $z_{\alpha} = 1,645$

Región de aceptación, $R_A = [-z_{\alpha}, +\infty)$ Región crítica o de rechazo, $R_c = (-\infty, -z_{\alpha})$

En este caso la región crítica o de rechazo es $R_c = (-\infty, -1,645)$. Como el estadístico de contraste $z = -10 \in R_c$ no se puede aceptar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%. Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, se rechaza la hipótesis de que el número medio de mensajes de WhatsApp que mandan los jóvenes al día no es inferior a 40, es decir es inferior a 40.

9.- Se sabe que el diámetro de las estrellas de mar de una región sigue una ley Normal con varianza $2,25 \text{ cm}^2$. Se sospecha que, igual que ocurre en otras regiones, su diámetro no supera los $11,7 \text{ cm}$ ($H_0: \mu \leq 11,7$). Para confirmarlo se extrae una muestra aleatoria de estrellas de mar de esa región, obteniéndose los siguientes diámetros:

12,5 11,8 13,1 14,3 11,7 12,6 12,7 12,1 13,5 11,5

a) Plantee un contraste de hipótesis, y para un nivel de significación del 5%, obtenga la región de rechazo del contraste. ¿Se puede confirmar la sospecha?

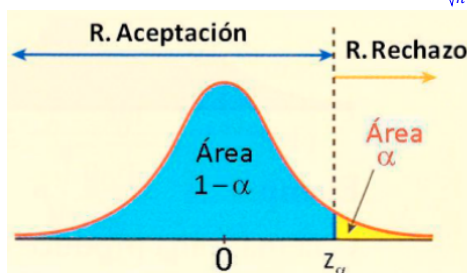
Resolución

Planteamos el contraste de hipótesis unilateral para la media, μ , de la variable aleatoria normal $X = \text{diámetro de las estrellas}$.

$\{H_0: \mu \leq 11,7 \text{ (hipótesis nula)} \quad H_1: \mu > 11,7 \text{ (hipótesis alternativa)}\}; \mu_0 = 11,7$

$n = 10$; media muestral, $\bar{x} = \frac{12,5 + 11,8 + 13,1 + 14,3 + 11,7 + 12,6 + 12,7 + 12,1 + 13,5 + 11,5}{10} = \frac{125,8}{10} = 12,58$

Desviación típica $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$. Estadístico de contraste $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{12,58 - 11,7}{\frac{1,5}{\sqrt{10}}} \cong 1,86$.



Nivel de significación $\alpha = 5\% = 0,05$; nivel de confianza $n_c = 1 - \alpha = 0,95$

z_{α} es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha}) = 1 - \alpha = 0,95$

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación, obtenemos $z_{\alpha} = 1,645$

Región de aceptación, $R_A = (-\infty, z_{\alpha}]$; Región crítica o de rechazo, $R_c = (z_{\alpha}, +\infty)$

En este caso, la región crítica o de rechazo es $R_c = (1,645, +\infty)$

Como el estadístico de contraste es $z = 1,86 \in R_c$, no se puede aceptar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%. Luego, no se puede confirmar la sospecha.

Resumiendo, rechazamos la hipótesis nula $H_0: \mu \leq 11,7$ para un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1: \mu > 11,7$.

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, concluimos que el diámetro de las estrellas de mar supera los $11,7 \text{ cm}$.

b) ¿Y para un nivel de significación del 3%, se puede confirmar la sospecha?

Resolución

Lo único que cambia respecto al apartado a) es el nivel de significación:

Nivel de significación $\alpha = 3\% = 0,03$; nivel de confianza $n_c = 1 - \alpha = 0,97$

z_α es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha = 0,97$

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, por aproximación, obtenemos $z_\alpha = 1,88$

Región de aceptación, $R_A = (-\infty, z_\alpha]$; Región crítica o de rechazo, $R_c = (z_\alpha, +\infty)$

En este caso la región crítica o de rechazo es $R_c = (1,88, +\infty)$

Como $1,86 \in R_A$, con un nivel de significación del 3%, concluimos que el diámetro de las estrellas de mar no supera los 11,7 cm.

10.- La proporción de nacimientos que ocurren con luna llena en los hospitales de una ciudad se consideraba no inferior a 0,45, pero un estudio afirma que en la actualidad esta proporción ha descendido. Para contrastar esta hipótesis se han elegido al azar, en estos hospitales, a 200 recién nacidos, de los cuales 70 nacieron con luna llena. Decida mediante un contraste de hipótesis, con $(H_0: p \geq 0,45)$, si la afirmación del estudio es correcta con un nivel de significación del 1%, indicando la región de rechazo.

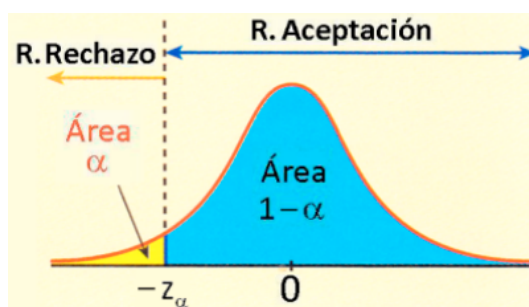
Resolución

Planteamos el contraste de hipótesis unilateral para la proporción, p , de nacimientos,

$\{H_0: p \geq 0,45$ (hipótesis nula) $H_1: p < 0,45$ (hipótesis alternativa) ; $p_0 = 0,45$

Tamaño muestral $n = 200$; proporción muestral, $\hat{p} = \frac{70}{200} = 0,35$

Estadístico de contraste $z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,35 - 0,45}{\sqrt{\frac{0,45(1-0,45)}{200}}} \cong -2,843$.



Nivel de significación $\alpha = 1\% = 0,01$; nivel de confianza $n_c = 1 - \alpha = 0,99$

z_α es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha = 0,99$

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, por aproximación, obtenemos $z_\alpha = 2,33$

Región de aceptación, $R_A = [-z_{\alpha} + \infty)$; Región crítica o de rechazo, $R_c = (-\infty, -z_{\alpha})$

En este caso, la región crítica o de rechazo es $R_c = (-\infty, -2,33)$

Como el estadístico de contraste $z = -2,843 \in R_c$ rechazamos la hipótesis nula $H_0: p \geq 0,45$ para un nivel de significación del 1% y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1: p < 0,45$.

Luego, la afirmación del estudio NO es correcta.

11.- El número de pulsaciones por minuto (p/m) de los pacientes de un centro de salud de una cierta población sigue una ley Normal de desviación típica 9.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 pacientes que da como número medio de p/m 68. Con un nivel del 97%, determine un intervalo de confianza para el número medio de las p/m de los pacientes del centro.

Resolución

$X = n^o$ de p/m $\rightarrow N(\mu, 9)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 97% para estimar μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 68$ la media de la muestra de tamaño $n = 100$, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,97}{2} = 0,985$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,985$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$.

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1,953$;

$I_c = (68 - 1,953 ; 68 + 1,953) = (66,047 ; 69,953)$

b) Con el mismo nivel de confianza, ¿Cuántos pacientes, como mínimo, se necesitan en la muestra para estimar el número medio de p/m con un error no superior a 1?

Resolución

Sabemos que $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el máximo error de estimación y $\sigma = 9$; $z_{\alpha/2} = 2,17$.

Nos piden hallar n para que

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{1} \leq \sqrt{n}$ elevando al cuadrado $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \sigma^2 \leq n$

Sustituyendo, $n \geq 2,17^2 \cdot 9^2 \cong 381,4$. El número mínimo de pacientes es de 382.

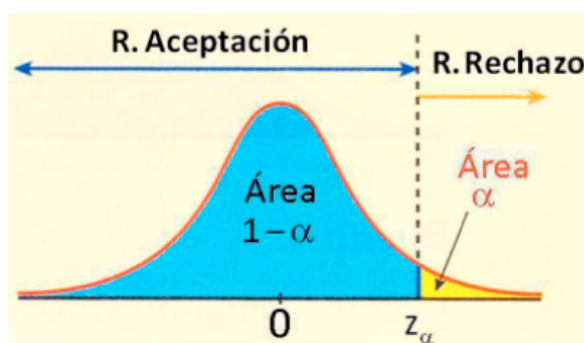
12.- En una encuesta realizada a 600 trabajadoras de una empresa, 250 de ellas manifiestan estar insatisfechas con su salario. La dirección de la empresa afirma que la proporción de trabajadoras que están insatisfechas con su salario no es superior a 0,3. Plantee un contraste de hipótesis para dicha proporción, con hipótesis nula $H_0: p \leq 0,3$. Con un nivel de significación del 4%, determine la región de rechazo y razone si se puede aceptar la afirmación de la dirección de la empresa.

Resolución

Planteamos el contraste de hipótesis unilateral para la proporción, p , de trabajadoras insatisfechas, $\{H_0: p \leq 0,23$ (hipótesis nula) $H_1: p > 0,23$ (hipótesis alternativa) ; $p_0 = 0,3$

Tamaño muestral $n = 600$; proporción muestral, $\hat{p} = \frac{250}{600} \cong 0,4167$

Estadístico de contraste $z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,4167 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{600}}} \cong 6,236$.



Nivel de significación $\alpha = 4\% = 0,04$; nivel de confianza $n_c = 1 - \alpha = 0,96$

z_α es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha = 0,96$

Usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación, obtenemos $z_\alpha = 1,75$

Región de aceptación, $R_A = R_A = (-\infty, z_\alpha]$; Región crítica o de rechazo, $R_c = (z_\alpha, +\infty)$

Nos piden la región de rechazo, $R_c = (1,75, +\infty)$; $6,236 \in R_c$

Rechazamos la hipótesis nula: con un nivel de significación del 4%, la afirmación de la empresa no es correcta, es decir la proporción de trabajadoras que están insatisfechas con su salario es superior a 0,3.