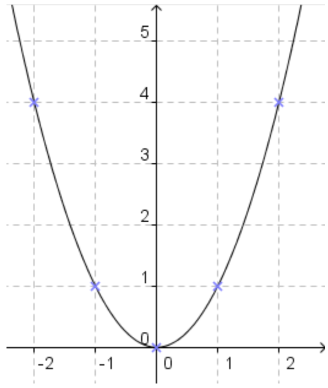
Chapitre 02
Variations des fonctions associées

I. Rappels

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est **croissante** sur I si, pour tous les nombres réels a et b de I, $a < b$ **implique** $f(a) \leq f(b)$.
f est **décroissante** sur I si, pour tous les nombres réels a et b de I, $a < b$ **implique** $f(a) \geq f(b)$.
f est **constante** sur I si, pour tous les nombres réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.
f est **monotone** sur I si f est soit **croissante** sur I, soit **décroissante** sur I.

Fonction carré

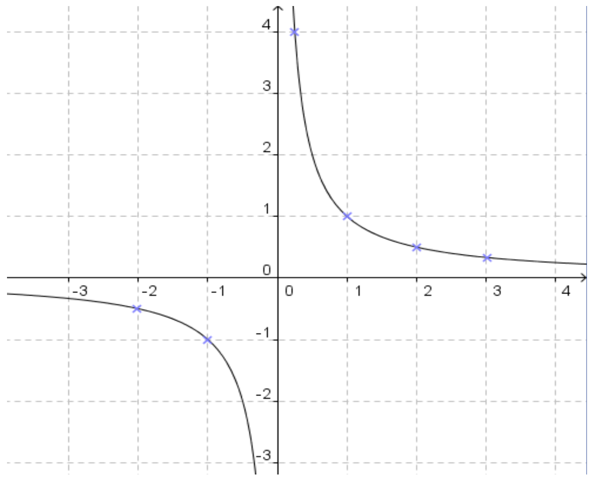


La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Propriété
La fonction **carré** est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Remarques
- La courbe de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction inverse



La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $R\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété
La fonction **inverse** est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et **strictement décroissante** sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Remarques
- La courbe de la fonction inverse est appelée une **hyperbole** de centre O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport au centre du repère.

Méthode

Étudier le sens de variation d'une fonction
Vidéo https://youtu.be/TWbjEeiZXnw

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$ est strictement croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$
Soit a et b deux nombres réels tels que $4 \leq a < b$

$f(a) - f(b) = a^2 - 8a + 3 - b^2 + 8b - 3$

$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 - 8a + 8b$

$f(a) - f(b) = (a - b)(a + b) - 8(a - b)$

$f(a) - f(b) = (a - b)(a + b - 8)$

$a < b$ donc $a - b < 0$
$a \geq 4$ et $b > 4$ donc $a + b > 8$ soit $a + b - 8 > 0$

On en déduit que $f(a) - f(b) < 0$ et donc $f(a) < f(b)$
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[4; +\infty[$

II. Étude de la fonction racine carrée

▶ **Vidéo** **https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4**

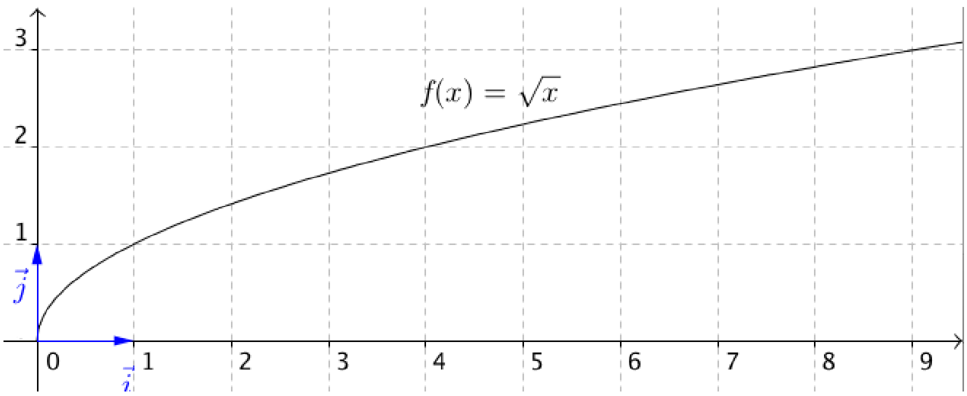
Définition
La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété
La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Démonstration
Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < 0$$

Donc $f(a) < f(b)$
Donc f est strictement croissante sur R_+.



III. Étude de la fonction valeur absolue

▶ **Vidéo** **https://youtu.be/O61rmOdXg9I**

1. Valeur absolue d'un nombre

Exemples
- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition
La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.
La valeur absolue de A se note $|A|$

Exemple
$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & si\ x \geq 5 \\ 5 - x & si\ x < 5 \end{cases}$

Propriétés
Soit x et y deux nombres réels.

$|x| \geq 0$ $\quad$ $|-x| = |x|$ $\quad$ $\sqrt{x^2} = |x|$
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y) \vee (x = -y)$

$|xy| = |x| \times |y|$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *pour* $y \neq 0$

Exemples

$|-3| = 3$ et $|3| = 3$ donc $|-3| = |3|$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

2. Distance et valeur absolue

Définition

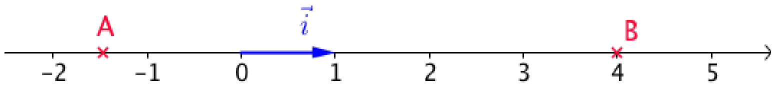
Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée munie d'un repère $(O, \vec{i})$, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre $|a-b|$

Ce nombre s'appelle aussi la **distance entre les réels a et b** et se note $d(a; b)$

Exemple

Calculer la distance entre les nombres $-1,5$ et 4.

$d(-1,5; 4) = |4-(-1,5)| = 5,5$



Propriété de l'inégalité triangulaire

Soit x et y deux nombres réels.

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Démonstration

Dans un repère $(O, \vec{i})$, soit A et B deux points d'abscisses respectives x et $-y$

On sait que $AB \leq AO + OB$, soit

$|x - (-y)| \leq |x - 0| + |0 - (-y)|$ Soit encore $|x + y| \leq |x| + |y|$

3. Fonction valeur absolue

Définition

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$

Propriété

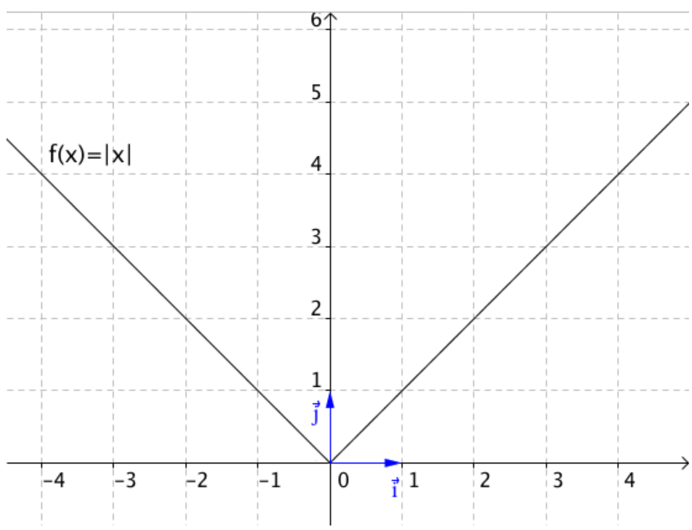
La **fonction valeur absolue** est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$

Eléments de démonstration

$f(x) = \begin{cases} -x \text{ sur }]-\infty; 0] \\ x \text{ sur } [0; +\infty[\end{cases}$

Sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \lvert x \rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Remarque

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

IV. Positions relatives de courbes

Propriété

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Démonstration

Dans un repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle C_f, C_g et C_h les courbes représentatives respectives des fonctions f, g et h telles que

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = x$$
$$h(x) = x^2$$

$f(0) = g(0) = h(0) = 0$

$f(1) = g(1) = h(1) = 1$

Les courbes C_f, C_g et C_h sont donc sécantes au point O et au point A(1 ; 1).

1er cas : $0 < x < 1$

$0 < \sqrt{x} < \sqrt{1}$

$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < 1$

$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} \times \sqrt{x} < 1 \times \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0 < \left(\sqrt{x}\right)^2 < \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{x}$

La fonction carré est croissante sur R_+. On en déduit que

$0 < x < \sqrt{x}$

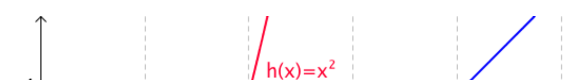
$\Leftrightarrow 0 < x^2 < \left(\sqrt{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 0 < x^2 < x$

Sur l'intervalle]0 ;1[, la courbe C_g est strictement au-dessus de la courbe C_h et strictement en dessous de la courbe C_f.

2ème cas : $x > 1$

$\sqrt{1} < \sqrt{x}$



$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x}$
$\Leftrightarrow 1 \times \sqrt{x} < \sqrt{x} \times \sqrt{x}$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} < \left(\sqrt{x}\right)^2$
$\Leftrightarrow \sqrt{x} < x$
La fonction carré est croissante sur R_+. On en déduit que

$\sqrt{x} < x$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 < x^2$
$\Leftrightarrow x < x^2$
Sur l'intervalle]0 ;1[, la courbe C_g est strictement au-dessus de la courbe C_f et strictement en dessous de la courbe C_h.

Propriété

- Sur l'intervalle [0 ;1], la droite d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe de la fonction carré et en dessous de la courbe de la fonction racine carrée.
- Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, les positions de ces trois courbes sont inversées.