

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures**Calculatrice interdite****OPTION B****PROBLÈME I**

X désigne une variable aléatoire **positive** dont la loi admet une densité de probabilité notée f .

On désigne par S la fonction (dite fonction de survie) définie pour $x \geq 0$ par :

$$x \rightarrow S(x) = P(X \geq x) \quad (\text{le symbole } P(X \geq x) \text{ désigne la probabilité de l'évènement } X \geq x).$$

1°- Exprimer S en fonction de la densité f . Montrer que S est décroissante et donner sa limite quand x tend vers $+\infty$.

2°- On suppose que la variable X admet une espérance.

Montrer l'inégalité : $xS(x) \leq \int_x^\infty t f(t) dt$. Donner la limite du produit $xS(x)$ quand x tends vers $+\infty$.

Montrer la relation : $Esp(X) = \int_0^\infty S(t) dt$ ($Esp(X)$ désigne l'espérance de la variable X).

3°- Soit un réel x tel que $S(x)$ soit strictement positif. Calculer la fonction de répartition de la loi de X conditionnée par l'évènement $X \geq x$. Donner une densité de cette loi.

On note $Esp_{X \geq x}(X - x)$ l'espérance de la variable aléatoire $X - x$ par rapport à la loi définie ci-dessus.

$$Esp_{X \geq x}(X - x) = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{S(x)}.$$

Montrer la relation :

4°- Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, strictement positive et dérivable.

$$g(x) = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{S(x)}$$

a- Montrer que les fonctions S définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que $g(x)$ vérifient

l'équation différentielle : $S'(x)g(x) = -S(x) \times (1 + g'(x))$.

b- On donne pour fonctions g successivement les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

(i) $x \rightarrow g(x) = a$

(ii) $x \rightarrow g(x) = a + x$

(iii) $x \rightarrow g(x) = \frac{1}{a + x}$

où a désigne un réel positif.

Déterminer, quand cela est possible, pour chacun de ces trois cas les fonctions S qui sont des fonctions de survie.

PROBLÈME II**PARTIE A**

Un point M se déplace sur un axe suivant les modalités décrites ci-dessous :

- a- Les seules positions possibles sont les points d'abscisses 0, 1, 2 et 3.
- b- X_n désigne l'abscisse aléatoire du point M à l'instant n . (n entier). **A l'instant initial (instant 0) le point M est supposé en position 1.**
- c- Entre deux instants consécutifs le point M change de position suivant les règles suivantes :
 - (i) si à l'instant n le point M est au point d'abscisse i ($i=1$ ou $i=2$) il est à l'instant $n+1$ au point d'abscisse $i-1$ avec une probabilité p et au point d'abscisse $i+1$ avec la probabilité q ($q=1-p$)
 - (ii) si à l'instant n le point M est au point d'abscisse i ($i=0$ ou $i=3$) il reste à l'instant $n+1$ dans cette position.
- d- Les expériences aléatoires associées à chaque changement de position sont indépendantes.

1°- Donner les lois des variables X_1 et X_2 .

2°- Plus généralement donner la loi de X_n pour n entier. (On pourra distinguer les cas n impair et n pair).

3°- On note E_0 (respectivement E_3) l'évènement « le point M s'est immobilisé au point d'abscisse 0 » (respectivement 3). Déduire de 2° les probabilités $P(E_0)$, $P(E_3)$.

Quelle est la probabilité pour que le point M finisse par s'immobiliser ?

4°- On note T la variable aléatoire instant où, pour la première fois, le point M atteint l'un des deux points d'abscisse 0 ou 3.

- (i) Donner les probabilités $P(T=1)$, $P(T=2)$, ..., $P(T=k)$, ...
- (ii) En déduire l'espérance de la variable T . Déterminer la valeur de p pour laquelle cette espérance est maximale. Quelle est alors son expression ?

5°- Donner succinctement les modifications à apporter aux résultats précédents quand à l'instant initial le point M est au point d'abscisse 2.

PARTIE B

On généralise l'expérience décrite en partie A en supposant que les positions possibles du point M sont les points d'abscisses $0, 1, \dots, N$. Les points où M s'immobilise sont les points d'abscisse 0 et N .

On suppose que, à l'instant initial (instant 0) M est situé au point d'abscisse i .

1°- Préliminaires :

Soit une suite $n \rightarrow u_n$ définie pour les entiers $\{0, 1, \dots, N\}$ par la donnée de :

- u_0 et u_N

- la relation $qu_{n+2} - u_{n+1} + pu_n = 0$

Donner l'expression explicite du terme u_n en fonction de u_0 , u_N et des racines du polynôme $qX^2 - X + p$, racines que l'on calculera.

2°- On note E_0 (respectivement E_N) l'évènement « le point M s'est immobilisé en 0 » (respectivement en N) et $\alpha(i)$ (respectivement $\beta(i)$) la probabilité de E_0 (respectivement E_N) quand le point M est à l'instant initial au point d'abscisse i .

a- Montrer que les suites α et β appartiennent à l'ensemble des suites γ vérifiant pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$:

$$\gamma(i) = p\gamma(i-1) + q\gamma(i+1)$$

b- En déduire le calcul des probabilités $\alpha(i)$ et $\beta(i)$.

c- Montrer que le point M finit par s'immobiliser avec une probabilité égale à 1.

3°- On note T la variable aléatoire égale à l'instant où, pour la première fois, le point M atteint l'un des deux points d'abscisse 0 ou N .

On note, pour $i \in \{0, \dots, N\}$ et k entier positif ou nul $w(i, k)$ la probabilité de l'évènement « $T=k$ » quand, à l'instant initial, le point M est au point d'abscisse i .

a- Donner les expressions de $w(0, k)$, $w(N, k)$, $w(i, 0)$, $w(i, 1)$.

b- Montrer la relation : $w(i, k) = pw(i-1, k-1) + qw(i+1, k-1)$ pour k entier strictement positif et pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

c- On note $g_i(s)$ la série définie par $g_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k w(i, k)$.

(i) Montrer que la série est convergente pour tout réel s de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

(ii) Donner les expressions de $g_0(s)$ et $g_N(s)$.

(iii) Montrer la relation $g_i(s) = spg_{i-1}(s) + sqg_{i+1}(s)$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$.

(iv) En déduire le calcul des fonctions $g_i(s)$. Comment à l'aide de ce calcul pourrait-on obtenir la loi de la variable T ?
