

PREMIER PROBLEME : OSCILLATIONS MECANQUES

Première partie : Oscillateur harmonique non amorti

1. Equation différentielle du mouvement

1.1 Dans R galiléen, la masse m est soumise à :

- son poids : $mg\vec{u}_x$

- la force de rappel du ressort : $-k(x-x_0)\vec{u}_x$

La poussée d'Archimède est négligeable dans l'air.

La deuxième loi de Newton donne : $m\vec{a}(G/R) = \vec{F}_{ext}$

En projection sur l'axe Ox, on obtient l'équation différentielle vérifiée par x :

$$(1) \quad m\ddot{x} = mg - k(x - x_0)$$

A l'équilibre, on a :

$$(2) \quad 0 = mg - k(x_{eq} - x_0) \quad \text{d'où} \quad x_{eq} = x_0 + mg/k$$

1.2 Si on fait (1) -(2), on obtient : **(3)** $m\ddot{x} = -k(x - x_{eq})$

D'où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$

1.3 la solution de l'équation (3) s'écrit : $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{eq}$

A $t = 0$, $x = x_{eq}$ et $v = v_0$ d'où $x(t) = (v_0/\omega_0) \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$

Deuxième partie : Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

2. Période de l'oscillateur non amorti

Les oscillations libres correspondent à l'étude précédente avec $m = \rho V$ donc

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/\rho V}$$

3. Détermination de la masse volumique du liquide

Dans R galiléen, la masse m est soumise à :

- son poids : $\rho V g \vec{u}_x$

- la force de rappel du ressort : $-k(x-x_0)\vec{u}_x$

- la poussée d'Archimède : $-\rho_l V g \vec{u}_x$

- la force de frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta R \dot{x} \vec{u}_x$

A l'équilibre, on obtient $\rho V g - k(x'_{eq} - x_0) - \rho_l V g = 0$

D'où $\rho_l = \rho - (k/Vg)(x'_{eq} - x_0)$

4. Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide

4.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient l'équation différentielle :

$$\rho V \ddot{x} = (\rho - \rho_l) V g - k(x - x_0) - 6\pi\eta R \dot{x}$$

D'où $\rho V \ddot{x} = -k(x - x'_{eq}) - 6\pi\eta R \dot{x}$

4.2 L'équation caractéristique de l'équation homogène est : $\rho V r^2 + 6\pi\eta R r + k = 0$
Le mouvement est pseudopériodique si le discriminant est négatif donc

$$\Delta = (6\pi\eta R)^2 - 4k\rho V < 0 \text{ ou } k > k_0 = (6\pi\eta R)^2/4\rho V$$

La pseudopulsation est la partie imaginaire positive des solutions de l'équation caractéristique
soit $\omega_2 = \sqrt{|\Delta|}/2\rho V = \sqrt{(k - k_0)/\rho V}$

5. Coefficient de viscosité du liquide

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - k_0/\rho V \text{ d'où } (6\pi\eta R)^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)4(\rho V)^2$$

$$\text{On a donc : } \eta = (\rho V/3\pi R)\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Troisième partie : Oscillations forcées

6. Régime permanent

6.1 En passant en notation complexe : $\underline{x} = \underline{X}e^{i\omega t}$ avec $\underline{X} = A e^{i\phi}$, on obtient :

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)\underline{X} = F_0/m \text{ d'où}$$

$$A = F_0/m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

6.2 De même $\sin \phi = -2\alpha\omega/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$

$$\text{et } \cos \phi = (\omega_0^2 - \omega^2)/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

7. Puissance absorbée par l'oscillateur

7.1 On a $v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$

$$P_e(t) = F.v = (F_0 \cos \omega t)(-A\omega \sin(\omega t + \phi)) = (-A\omega F_0/2)(\sin(2\omega t + \phi) + \sin \phi)$$

$$\langle P_e \rangle = (-A\omega F_0/2)(\sin \phi)$$

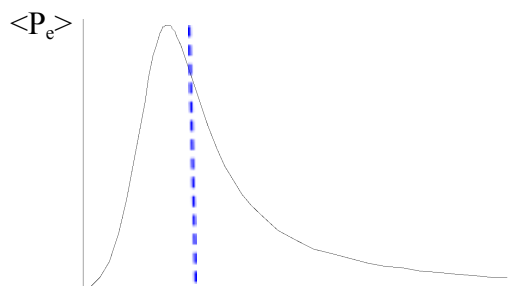
$$\text{Soit en remplaçant : } \langle P_e \rangle = (F_0^2 \alpha / m) \cdot \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2]$$

7.2 En divisant par ω^2 : $\langle P_e \rangle = (F_0^2 \alpha / m) \cdot 1 / [(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\alpha^2]$

$\langle P_e \rangle$ est maximale quand le dénominateur est minimal soit pour $\omega = \omega_0$ et

$$\langle P_e \rangle_{\max} = F_0^2/4\alpha m.$$

Allure de la représentation graphique de $\langle P_e \rangle$ en fonction de ω :



$$\omega_0$$

$$\omega$$

$\omega_{\max}$ correspond au phénomène de résonance où la puissance absorbée par l'oscillateur est alors maximale.

Quatrième partie : Petites oscillations d'un bouchon de liège

8. A l'équilibre, le poids du bouchon est compensé par la poussée d'Archimède donc :

$$\rho V g = \rho_{\text{eau}} (V/2) g \quad \text{d'où} \quad \rho = \rho_{\text{eau}}/2$$

9.1 Si $z \ll R$, $V_i = V/2 - (2Rz)L = V/2 - az$ avec $a = 2RL$

9.2 En appliquant la deuxième loi de Newton et en projetant sur Oz :

$$\rho V \ddot{z} = \rho_{\text{eau}} V_i g - \rho V g = \rho g (2V/2 - 2az - V)$$

$$\text{Soit } \ddot{z} = - (4RLg/V) z = - (4g/\pi R) z$$

$$\text{D'où } \omega_0 = \sqrt{(4g/\pi R)}$$

9.3 La solution de l'équation différentielle est $z(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

En utilisant les conditions initiales, on obtient $z(t) = z_0 \cos \omega_0 t$

DEUXIEME PROBLEME : UTILISATION DE SOLENOIDES

Première partie : Champ magnétique créé par un tore

1. Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égal au produit de μ_0 par la somme des intensités des courants enlacés par le contour $\vec{I}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{I} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

S étant une surface quelconque s'appuyant sur C, $d\vec{S}$ orienté de façon compatible avec l'orientation de C.

Ce théorème se déduit de l'équation de Maxwell Ampère dans l'approximation des régimes quasi-permanents : $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

2. Symétries

$\vec{B}(M)$ est un pseudovecteur : il est perpendiculaire au plan de symétrie $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc $\vec{B}(M)$ est orthoradial. Il y a invariance de la distribution par rotation autour de Oz donc $|\vec{B}(M)|$ ne dépend pas de θ : $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$

3. Expression du champ magnétique

On considère un cercle d'axe Oz, de rayon r, orienté selon $\vec{e}_\theta$, placé dans le plan z fixé.

D'après le théorème d'Ampère, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r, z) 2\pi r = \mu_0 \vec{I}$

Pour $|z| \ll \text{ext}$: $\vec{I} = 0$ donc $B(r, z) = 0$

Pour $|z| \ll \text{int}$:

Si $r < R_1$: $\vec{I} = 0$ donc $B(r, z) = 0$

Si $r > R_2$: $\vec{I} = NI - NI = 0$ donc $B(r, z) = 0$

Si $R_1 < r < R_2$: $\vec{I} = NI$ d'où $\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta$

Donc $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{int}} = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta$

4. Cas d'un solénoïde infini

Si le rayon tend vers l'infini, en notant $l = 2\pi r$, on a

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\text{int}} = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right) \vec{e}_\theta = (\mu_0 n I) \vec{e} \quad \text{avec } n = N/l.$$

Deuxième partie : Inductance d'un solénoïde

5. Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant le flux propre

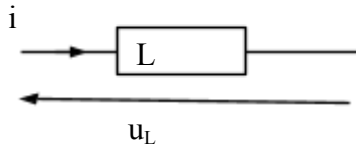
Pour une spire : l'orientation de la spire étant celle du courant, la normale à sa surface est donc dans le même sens que $\vec{B}$ d'où $\Phi_0 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\mu_0 n I) S$

D'où $\Phi_{\text{propre}} = N \Phi_0 = \mu_0 N^2 S I/l$.

$$\phi_{propre} = L I \text{ d'où } L = \mu_0 N^2 S / l$$

6. Détermination de l'inductance propre du solénoïde par l'énergie magnétique

6.1 En convention récepteur, $u_L = L (di/dt)$



6.2 $P_{el}(t) = u_L(t) \cdot i(t) = d(1/2 Li^2)/dt = dE_L/dt$ d'où $E_L = 1/2 Li^2$

6.3 $E_L = \iiint_V E_{m,vol} d\tau = \iiint_V (B^2/2\mu_0) d\tau = (B^2/2\mu_0)(S \cdot l) = \mu_0 N^2 S i^2 / 2l$

D'où $L = \mu_0 N^2 S / l$

Troisième partie : régimes transitoires entre deux solénoïdes couplés

7. Etablissement de courant dans le solénoïde

A $t=0$, on ferme l'interrupteur.

L'équation électrique s'écrit : $E = Ri + L di/dt$

A $t=0$, $i = 0$ (continuité du courant dans la bobine) donc $i(t) = (E/R)(1 - \exp(-tR/L))$

Quand $t \rightarrow \infty$, $i = i_m = E/R$

8. Circuits couplés

8.1 Equations électriques :

(1) $E = Ri_1 + L di_1/dt + M di_2/dt$

(2) $0 = Ri_2 + L di_2/dt + M di_1/dt$

8.2 En ajoutant (1) et (2), on obtient l'équation différentielle vérifiée par $I = i_1 + i_2$:

$$E = R I + (L+M) dI/dt$$

En faisant (1) - (2), on obtient celle vérifiée par $J = i_1 - i_2$:

$$E = R J + (L-M) dJ/dt$$

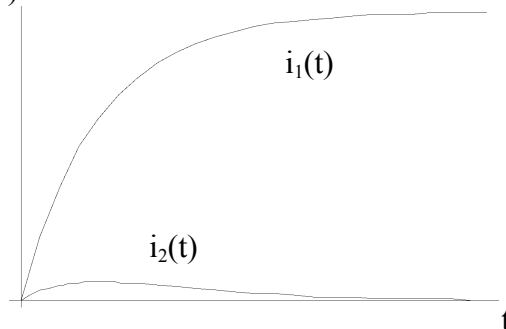
8.3 Par continuité dans les circuits contenant une bobine, à $t = 0$, $I = 0$ et $J = 0$.

D'où $I(t) = (E/R)(1 - \exp(-t/\tau_1))$ et $J(t) = (E/R)(1 - \exp(-t/\tau_2))$

$i_1(t) = (I+J)/2$ donc $i_1(t) = (E/R) (1 - (\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2))/2)$

$i_2(t) = (I-J)/2$ donc $i_2(t) = (E/R) (-\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2))/2$

Allure des courbes : $i_1(t)$



Quatrième partie : champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

9. Champ électrique à l'intérieur d'un solénoïde

9.1 Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{rot}(\vec{E}) = - \partial \vec{B} / \partial t$

Comme i dépend du temps, alors le champ magnétique dépend du temps donc il existe un champ électrique.

9.2 Comme le champ électrique est orthoradial et ne dépend que de r ,

$$\vec{rot}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = -\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(M) = \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta$$

10. Introduction d'un conducteur dans le solénoïde

10.1 Effet Joule dans le cylindre métallique

10.1.1 Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'où $\vec{j} = \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) \vec{e}_\theta$

10.1.2 $dP_j = (\vec{j} \cdot \vec{E}) d\tau$

donc $dP_j = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2)]^2 r dr d\theta dz = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t]^2 r^3 dr d\theta dz / 4$

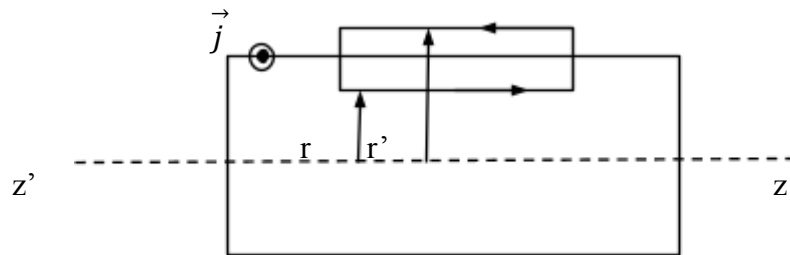
En intégrant, on obtient :

$P_j = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t]^2 h \pi a^4 / 8$ et $\langle P_j \rangle = \gamma [\mu_0 n I_0 \omega]^2 h \pi a^4 / 16$

10.1.3 Chauffage par induction

10.2 Influence du conducteur cylindrique sur le champ magnétique

10.2.1 On applique le théorème d'Ampère à un rectangle orienté de longueur H , de cotés distants de $r < a$ et de $r' > a$.



$$\oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = B'(r,t) H - B'(r',t) H = B'(r,t) H \quad (B' \text{ nul à l'extérieur})$$

Théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} \oint_{rectangle} \vec{B}' \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \iint_S \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t (r/2) dr dz = \gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t (a^2 - r^2) H / 4 \end{aligned}$$

D'où $B'(r,t) = \gamma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin \omega t (a^2 - r^2) / 4$

10.2.2 Le rapport des amplitudes des champs est alors :

$$B'/B = \mu_0 \omega \gamma (a^2 - r^2) / 4$$

10.2.3 Le rapport précédent est maximal en $r=0$ donc $B' \ll B$ si $\mu_0 \omega \gamma a^2 \ll 1$