

1.3. Propiedades de los números reales

Los números reales pueden caracterizarse el conjunto de los números reales como un conjunto que satisfaga la siguiente lista de axiomas.

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$ (Cerradura en la suma)
2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$ (Conmutatividad en la suma)
3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Asociatividad en la suma)
4. Existe $0 \in \mathbb{R}$ de manera que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Neutro aditivo)
5. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $-x + x = 0$ (Inverso aditivo)
6. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $xy \in \mathbb{R}$ (Cerradura en la multiplicación)
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $xy = yx$ (Conmutatividad en la multiplicación)
8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(xy)z = x(yz)$ (Asociatividad en la multiplicación)
9. Existe $1 \in \mathbb{R}$ de manera que $x1 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (Neutro multiplicativo)
10. Para cada $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1$ (Inverso multiplicativo)
11. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x(y + z) = xy + xz$ (Distributividad de la multiplicación en la suma)
12. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple sólo una de estas: (Tricotomía)
 - $x < y$
 - $y < x$
 - $x = y$
13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$ (Transitividad)
14. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $x + z < y + z$ (Monotonía en la suma)

15. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $0 < z$, entonces $xz < yz$ (Monotonía en la multiplicación)
16. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces E tiene supremo en $\mathbb{R}$ (Axioma del supremo)

Los axiomas del 1 al 15 corresponden a la estructura más general de cuerpo ordenado. El último axioma es el que distingue $\mathbb{R}$ de otros cuerpos ordenados como $\mathbb{Q}$. Debe señalarse que los axiomas 1 a 15 no constituyen una teoría categórica ya que puede demostrarse que admiten al menos un modelo no estándar diferente de los números reales, que es precisamente el modelo en el que se basa la construcción de los números hiperreales

En la figura 1 podemos ver un resumen de las propiedades básicas de los números reales.

Si a, b y c son números reales entonces:

Propiedad	Operación	Definición	Que dice	Ejemplo
Commutativa	Suma	$a+b = b+a$	El orden al sumar o multiplicar reales no afecta el resultado.	$2+8 = 8+2$
	Multiplicación	$ab = ba$		$5(-3) = (-3)5$
Asociativa	Suma	$a+(b+c)=(a+b)+c$	Puedes hacer diferentes asociaciones al sumar o multiplicar reales y no se afecta el resultado.	$7+(5+1)=(7+5)+1$
	Multiplicación	$a(bc) = (ab)c$		$-2(4 \times 7) = (-2 \times 4)7$
Identidad	Suma	$a+0 = a$	Todo real sumado a 0 se queda igual; el 0 es la identidad aditiva.	$-11+0 = -11$
	Multiplicación	$a \times 1 = a$		$17 \times 1 = 17$
Inversos	Suma	$a + (-a) = 0$	La suma de opuestos es cero. El producto de recíprocos es 1.	$15 + (-15) = 0$
	Multiplicación	$(a \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$		$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
Distributiva	Suma respecto a Multiplicación	$a(b+c) = ab + ac$	El factor se distribuye a cada sumando.	$2(x+8) = 2(x) + 2(8)$

Figura 1. Propiedades básicas de los números reales

1.3.1. Tricotomía.

La propiedad de tricotomía de números reales indica que, para cualquier dos números reales a y b , uno del siguiente es exactamente verdad:

$a < b$, $a = b$, $a > b$.

Para cualquier relación de equivalencia R encendido conjunto A , la relación es tricotoma si para todo el x y y en A exactamente una de xRy , $x=y$, yRx asimientos. (R es cualquier simbolo $>$, $<$, $\leq$, o $\geq$)

1.3.2. Transitividad

Es una de las propiedades más necesarias de los números reales. En general, la propiedad de la transitividad tiene su aplicación en dos categorías: La Transitividad de la igualdad y la Transitividad de la desigualdad.

De acuerdo con la transitividad de la igualdad, si dos números son equivalentes al mismo número, entonces todos los números son equivalentes entre sí. Es decir, si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

La Transitividad de la desigualdad trata con cuatro subpartes correspondientes a; mayor que, menor que, mayor o igual que y menor o igual que las desigualdades.

Si a , b , c son tres números reales y

- 1). Si $a < b$ y $b < c$, entonces en ese caso, $a < c$.
- 2). Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
- 3). Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
- 4). Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $b \geq c$.

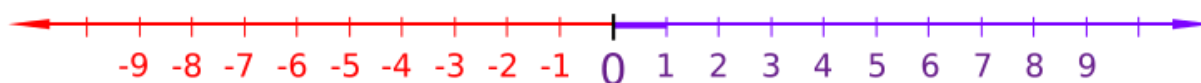
1.3.3. Densidad

Un número real es un número que existe en la realidad, lo que significa que cada punto en la recta numérica real representa un número real.

Puede ser un número racional o irracional, un número entero o trascendental, de cualquier tipo.

Existe una serie de propiedades de los números reales que deben ser estudiadas a profundidad para entender el concepto de los números reales y también las operaciones basadas en números reales.

La densidad es una propiedad fundamental de los números reales, según la cual los números reales son densos en naturaleza, o en términos simples, entre dos números reales existe un tercer número real, en todos los casos.



En la figura anterior, existen una cantidad infinita de números reales entre cero y uno.

A la luz de la declaración anterior se puede concluir que la recta numérica no tiene espacios entre ella y por esta razón es muy densa, representando así una cantidad infinita de números sobre ella.

Para demostrar la afirmación anterior, se puede decir que entre dos números reales siempre va existir otro número que lo divida en partes iguales, por ejemplo entre 0 y 1 la mitad sería $\frac{1}{2}$, y la mitad de este nuevo segmento sería $\frac{1}{4}$, si volvemos a buscar la mitad resultaría $\frac{1}{8}$ y así sucesivamente y no podríamos concluir con un último número.