

Université Abdel Hamid Ben Badis Mostaganem Faculté des Sciences Exactes et de
l'Informatique Département de Mathématiques et d'Informatique

Epreuve Ecrite du Concours d'Accès en 3^{ème} Cycle LMD en Mathématiques
Option : Frames, Théorie des Opérateurs et Applications

Epreuve 1 Analyse Moderne

Date: Jeudi 08 Octobre 2015 Durée : 1 Heure 30 Minutes Time: 09.00#10.30 (reading time)

Partie 1 (10 points)

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme Euclidienne.

Rappelons qu'un ensemble Ω est dit convexe dans $\mathbb{R}^n$, si pour tout $x, y \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$

$(1-\lambda)x + \lambda y \in \Omega$.

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dit quasiconvexe si pour tout $x, y \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$
 $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max(f(x), f(y))$.

1. (06 points) Montrer que f est quasiconvexe si et seulement si l'ensemble

$\{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$,

est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. (02 points) Pour $n \geq 1$, donner un exemple de fonction quasiconvexe.

Justifier graphiquement votre réponse.

3. (02 points) Vérifier à l'aide d'une interprétation graphique, qu'une fonction quasiconvexe peut avoir un point de discontinuité à l'intérieur de son domaine.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Partie 2 (10 points)

Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \varphi(x)$$

$$g(x, y) = \varphi(y)$$

$$f(x, y) = \varphi(x)$$

$$g(x, y) = \varphi(y)$$

$$f(x, y) = \varphi(x)$$

$$g(x, y) = \varphi(y)$$

$$\varphi(t) dt.$$

1. (03 points) Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. (04 points) Notons par $Df(x, y)$ et $Dg(x, y)$ la différentielle de f et g au point (x, y)

respectivement. Calculer

$$Df(x, y)(h, k) \text{ et } Dg(x, y)(h, k) \text{ pour tout } (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

3. (03 points) On définit

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto F(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

On note $B =]-1, 1[\times]-1, 1[$ Lipschitzienne sur B .

B et On muni $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la norme

$$\| \cdot \|$$

. Montrer que F est

Indication: Vous pouvez utiliser le théorème des Accroissements Finis ci-dessous.

Theorem 1 (Accroissements Finis) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U . On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|Df(u)\| \leq M$ quel que soit $u \in U$. Alors $f(x) - f(y) \leq M \|x - y\|$ pour tout $x, y \in U$.

$$f(y) - f(x) \leq M \|y - x\|$$

$$\| \cdot \|$$

$$\| \cdot \|$$

$$\| \cdot \|$$

quel que soit $(x, y) \in U \times U$