

**Тема: Узагальнення і систематизація знань з теми «Тригонометричні функції». Задачі, які приводять до поняття похідної**

Посилання на підручник:  
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf>

**Матеріали до теми:**

**I. Сприймання і усвідомлення поняття миттєвої швидкості прямолінійного руху матеріальної точки.**

Нехай матеріальна точка  $M$  рухається прямолінійно по закону  $s = f(t)$  (рис. 20).

В момент часу  $t_0$  вона зайняла положення  $M_0$  і пройшла шлях  $S_0 = f(t_0)$ . Знайдемо швидкість точки в момент часу  $t_0$ .

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу  $\Delta t$ , починаючи з моменту  $t_0$ , точка перемістилася на відстань  $\Delta s$  і зайняла положення  $M_1$ . Тоді  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$ .

За проміжок часу  $\Delta t$  матеріальна точка проходить шлях

$\Delta s = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ . Середня швидкість  $v$  руху на проміжку  $M_0M_1$

дорівнює:

$$v_{\text{сер.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок  $\Delta t$  буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо  $\Delta t$  наближається до нуля, то середня

швидкість  $v_{\text{сер.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  буде наближатися до швидкості в момент часу  $t_0$ .



*Миттєвою швидкістю* точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу  $t_0$  називається границя середньої швидкості при умові, що  $\Delta t$  наближається до нуля.

$$v_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Числа  $\Delta t$ ,  $\Delta s$  називаються відповідно приростом часу, приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху  $\Delta s$  до відповідного приросту часу  $\Delta t$ , коли приріст часу наближається до нуля.

### Приклад 1.

Точка рухається прямолінійно по закону  $s(t) = 5t^2 + t + 3$  ( $s$  — шлях в метрах,  $t$  — час в секундах). Знайдіть швидкість точки:

а) в довільний момент  $t_0$ ; б) в момент часу  $t = 2$  с.

#### Розв'язання

а) 1) нехай значення аргументу  $t_0$  одержало приріст  $\Delta t$ , тоді  $t_1 = t_0 + \Delta t$ .

2) Знайдемо відповідний приріст шляху

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - (5t_0^2 + t_0 + 3) = 5t_0^2 + 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t.$$

3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу (середню

$$\text{швидкість): } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t$$

4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту часу

$$(\text{середньої швидкості}): \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10t_0 + 1 + 5\Delta t) = 10t_0 + 1$$

Отже, миттєва швидкість точки в довільний момент часу  $t_0$  дорівнює  $10t_0 + 1$ .

Отже, при заданому законі руху  $s(t)$  миттєва швидкість  $v(t)$  в довільний момент часу  $t$  обчислюється по формулі  $v(t) = 10t + 1$ .

б) Якщо  $t = -2$  с, то маємо  $v(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$ ;

Відповідь: а)  $10t + 1$ ; б)  $21 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

## II. Сприймання і усвідомлення поняття дотичної до кривої.

В курсі геометрії ви познайомились з означенням дотичної до кола: дотичною до кола називається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке означення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь  $OY$  має тільки одну спільну точку з графіком функції  $y = x^3$ , проте її не можна вважати дотичною до кубічної параболи в точці  $O$  (рис. 21).

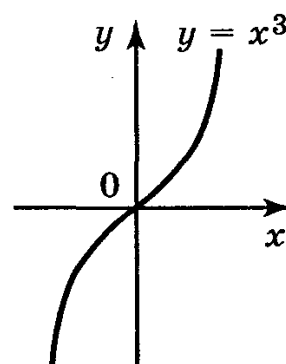


Рис. 21

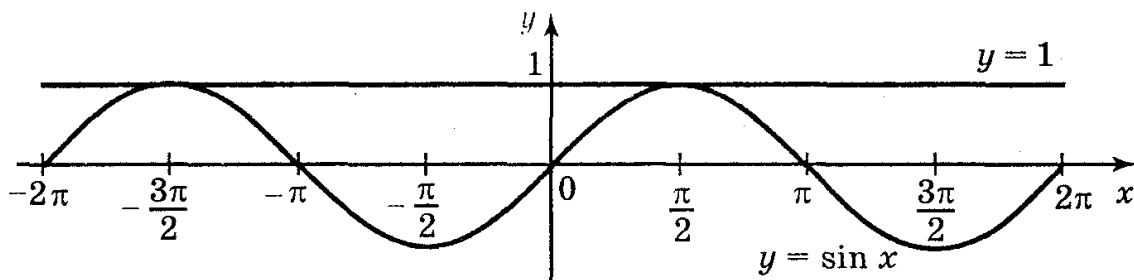


Рис. 22

Пряма  $y = 1$  і синусоїда  $y = \sin x$  мають безліч спільних точок (рис. 22), проте пряму  $y = -1$  вважають дотичною до синусоїди.

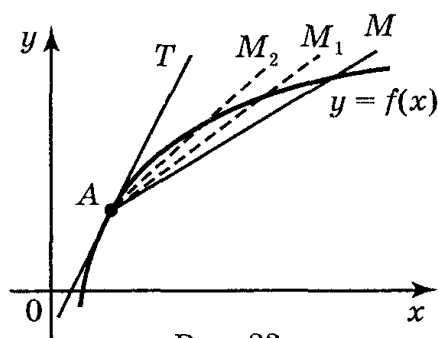


Рис. 23

Для введення означення дотичної до кривої розглянемо функцію  $y = f(x)$  і її графік — криву лінію (рис. 23). Нехай точки  $A$  і  $M$  належать графіку функції  $y = f(x)$ , проведемо січну  $AM$ .

Зафіксуємо точку  $A$ . Нехай точка  $M$ , рухаючись по кривій, наближається до точки  $A$ . При цьому січна  $AM$  буде повертатися навколо точки  $A$  і в граничному положенні при наближенні точки  $M$

до точки  $A$  січна займе положення прямої  $AT$ . Пряму  $AT$  називають дотичною до даної кривої в точці  $A$ .

Дотичною  $AT$  до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $A$  називається граничне положення січної  $AM$ , коли точка  $M$ , рухаючись по кривій, наближається до точки  $A$ .

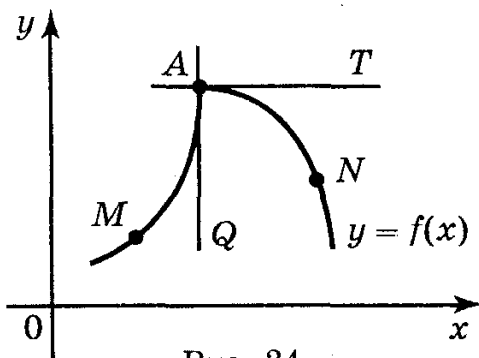


Рис. 24

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис. 24 зображено криву  $y = f(x)$ , яка в точці  $A$  не має дотичної, бо якщо точка  $M$  буде наближатися до точки  $A$  по лівій частині кривої, то січна  $MA$  займе граничне положення  $AQ$ .

Якщо точка  $N$  буде наближатися по правій частині кривої, то січна  $NA$  займе граничне положення  $AT$ . Одержуємо дві різні прямі  $AQ$  і

$AT$ , це означає, що в точці  $A$  до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $A(x_0; y_0)$ .

Дотична — це пряма, а положення прямої  $y = kx + b$ , яка проходить через точку  $A(x_0; y_0)$  визначається кутовим коефіцієнтом прямої  $k = \tan \alpha$ , де  $\alpha$  — кут між прямою і додатнім напрямом осі  $OX$  (рис. 25).

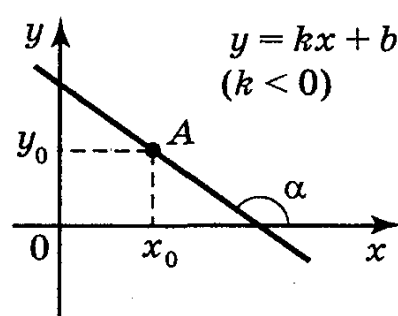
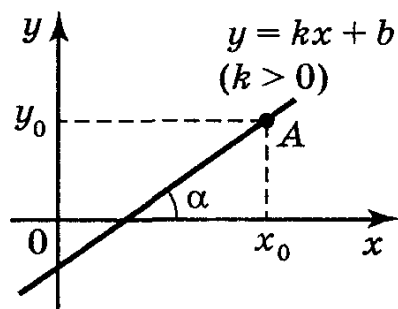


Рис. 25

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число  $k$ .

Нехай в точці  $A(x_0; y_0)$  (рис. 26) кривої  $y = f(x)$  існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1) Надамо аргументу  $x_0$  приросту  $\Delta x$ , одержимо нове значення аргументу  $x_0 + \Delta x$ .

2) Знайдемо відповідний приріст функції:  
 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

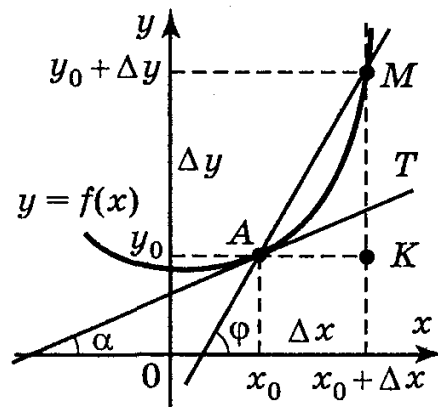


Рис. 26

3) Знайдемо відношення  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

Із трикутника  $AMK$  маємо:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle MAK$ . Так як  $\angle MAK = \varphi$  — куту нахилу січної  $AM$  з додатним напрямом осі  $OX$ , то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$ .

4) Якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$  і точка  $M$  буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки  $A$ .

При цьому січна  $AM$  буде повертатися навколо точки  $A$ , а величина кута  $\varphi$  буде змінюватися зі зміною  $\Delta x$ . Граничним положенням січної  $AM$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  буде дотична  $AT$ , яка утворює з додатним напрямом осі  $OX$  деякий кут, величину якого позначимо через  $\alpha$ .

Отже,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi = k$  — кутовий коефіцієнт дотичної.

### Завдання:

1. Повторити §2, звернути увагу с. 100-102.

Опрацювати теоретичний матеріал §3, п. 18.

2. Законспектувати означення.

3. Виконати письмово вправи: 18.1-18.3.

4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://naurok.com.ua/prezentaciya-trigonometrichni-funkci-riven-standartu-10-klass-86038.html>

<https://vseosvita.ua/library/prezentacia-na-temu-zadaci-so-privodat-do-ponatta-pohidnoi-74361.html>

**ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!!** Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net) , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу [valentinatalavera@ukr.net](mailto:valentinatalavera@ukr.net) .