

Durin Paule

**6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.**

Tél: 03.85.59.16.48.

Corrigé de l'épreuve commune du concours 2002

des Ecoles des Mines d'Albi, Ales, Douai, Nantes.

Problème d'analyse

1°) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t}$.

1-1) Continuité et parité de f .

La fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est définie et continue sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Donc f est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

Au voisinage de 0, $\text{Arctan}(t) \sim t$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} = 1 = f(0)$, ce qui traduit que f

est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction Arctan est impaire, donc $\forall t \neq 0, f(-t) = \frac{\text{Arctan}(-t)}{-t} = f(t)$ et f est paire.

1-2) Développement limité à l'ordre 1 en 0

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Donc, Arctan' a un développement limité à l'ordre 2 en 0 qui est :

$\text{Arctan}'(t) = 1 - t^2 + t^2 \varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_1(t) = 0$.

Alors Arctan a un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est :

$\text{Arctan}(t) = t - \frac{t^3}{3} + t^3 \varepsilon_2(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_2(t) = 0$. (sachant que $\text{Arctan}(0) = 0$)

Par suite, f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 qui est :

$f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + t^2 \varepsilon_2(t)$ et par troncature, a un développement limité à l'ordre 1 en 0 qui est :

$f(t) = 1 + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Conclusion f est donc dérivable en 0 et on a : $f'(0) = 0$.

1-3) Dérivabilité de f .

Arctan et $t \rightarrow \frac{1}{t}$ sont dérivables sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Donc sur chacun de ces intervalles,

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

Comme elle est dérivable en 0 elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\text{Arctan}(t)}{t^2}, f'(0) = 0$.

1-4) Signe de f' .

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $I(t) = \int \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw$. Effectuons une intégration par parties :

On pose

$$\{u(w) = w \quad u'(w) = 1 \quad v'(w) = \frac{w}{(1+w^2)^2} \quad v(w) = -\frac{1}{2(1+w^2)}\}$$

u, v sont des fonctions rationnelles de classe C^∞ sur R , on a donc :

$$I(t) = \left[\frac{-w}{2(1+w^2)} \right]_0^t + \frac{1}{2} \int \frac{dw}{1+w^2} = \frac{-t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(t) \text{ soit :}$$

$$I(t) = \frac{-t^2}{2} \left(\frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\text{Arctan}(t)}{t} \right) = \frac{-t^2}{2} f'(t).$$

Vu la parité de f , il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$. On a alors $\forall t > 0, I(t) > 0$ car intégrale sur $[0, t]$ d'une fonction continue, strictement positive sur $]0, t]$.

Conclusion : $\forall t \in]0, +\infty[, f'(t) < 0$ et donc f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

1-5) Courbe représentative de f .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, d'où le tableau de variations.

t	
	

$f(1) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Pour le graphe, voir graphe commun avec celui de φ .

2°) Soit $\varphi: R \rightarrow R$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0, \varphi(x) = \frac{1}{x} \int f(t) dt$.

2-1) Continuité de φ

f est continue sur R . Donc elle admet des primitives sur R , soit F celle qui s'annule en 0.

Alors $\forall x \neq 0, \varphi(x) = \frac{1}{x} F(x)$.

F est dérivable donc continue sur R . φ est donc continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

$F(0) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = F'(0) = f(0) = 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0.

Conclusion : φ est continue sur R .

$\forall x \neq 0, \varphi(-x) = \frac{1}{-x} \int f(t) dt$. On fait le changement de variable $t = -u$.

$\int f(t) dt = \int f(-u)(-du) = - \int f(u) du$ car f est paire. On a donc :

Conclusion : $\forall x \neq 0, \varphi(-x) = \varphi(x)$. Donc φ est paire.

2-2) Encadrement de φ .

Soit $x > 0$. Sur $[0, x]$, f est décroissante, d'où $\forall t \in [0, x], f(x) \leq f(t) \leq f(0) = 1$.

Par positivité de l'intégrale on a : $\int f(x) dt \leq \int f(t) dt \leq \int 1 dt$ soit :

$xf(x) \leq x\varphi(x) \leq x$ et enfin puisque $x > 0, f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.

Soit $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $f(-x) \leq \varphi(-x) \leq 1$. Or f et φ sont paires, donc on

encore : $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.

On a donc : $\forall x \neq 0, f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$, et comme $f(0) = \varphi(0) = 1$, on a :

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.

2-3) Dérivée de φ .

On a vu que $\forall x \neq 0, \varphi(x) = \frac{1}{x}F(x)$ avec F dérivable et $F' = f$.

Dès lors, φ est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et $]0, + \infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables.

On a alors : $\varphi'(x) = \frac{F'(x)}{x} - \frac{F(x)}{x^2}$ soit $\varphi'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - \varphi(x)]$.

Dérivabilité de φ en 0.

On connaît le développement limité de f à l'ordre en 0.

On en déduit celui de F , puis celui de φ .

$$f(x) = 1 + x\varepsilon(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$F(x) = x + x^2\varepsilon_3(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0 \quad F(0) = 0.$$

$$\varphi(x) = 1 + x\varepsilon_3(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

φ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

D'après la question 2-2, $\varphi'(x) < 0$ sur $]0, + \infty[$ et $\varphi'(x) > 0$ sur $] - \infty, 0[$.

φ est donc croissante sur $] - \infty, 0[$ et décroissante sur $]0, + \infty[$.

2-4) Etude de φ au voisinage de $+\infty$.

$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(t) < \frac{\pi}{2}$. Soit alors $x > 1, \forall t \in [1, x], 0 < f(t) < \frac{\pi}{2t}$ d'où :

$$0 \leq \int f(t)dt \leq \frac{\pi}{2} \int \frac{dt}{t} \text{ soit } 0 \leq \int f(t)dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x. \text{ On en déduit :}$$

$$\text{pour } x > 1, 0 \leq \frac{1}{x} \int f(t)dt \leq \frac{\pi}{2x} \ln x \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int f(t)dt = 0.$$

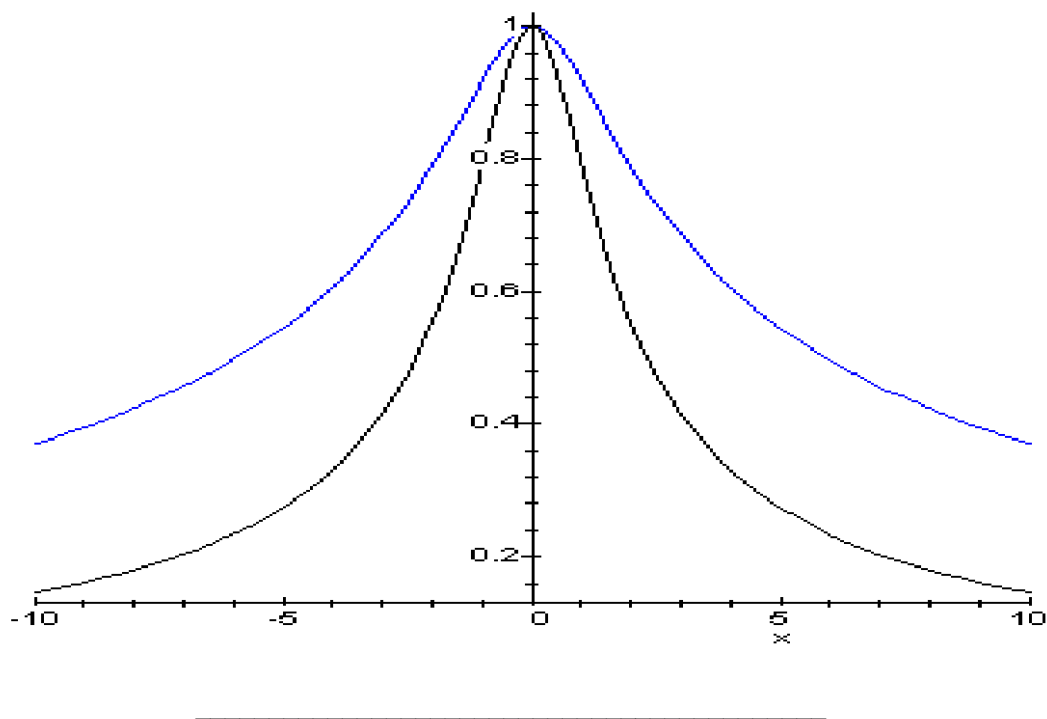
$$\text{Or } \varphi(x) = \frac{1}{x} \int f(t)dt + \frac{1}{x} \int f(t)dt.$$

$$\text{Sur } [0, 1], 0 < f(t) \leq 1 \text{ et donc } 0 \leq \frac{1}{x} \int f(t)dt \leq \frac{1}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int f(t)dt = 0.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

2-5) Courbe représentative de φ .

Le tableau de variation de φ est le même que celui de f .



3°) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

3-1) Soit $u: t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$. Etudions cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

$u'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ d'où le tableau de variation :

Conclusion : On a donc bien $\forall t \geq 0$, $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

3-2) Montrons que $\forall x > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

Pour $x > 0$, $\varphi'(x) < 0$ et on a $|\varphi'(x)| = \frac{1}{x}(\varphi(x) - f(x))$ d'après 2-3.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, d'où $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$ que l'on

peut écrire : $\frac{1}{x^2}(x - \text{Arctan}(x))$ soit encore : $\frac{1}{x^2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$, c'est à dire :

$$\frac{1}{x^2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Conclusion : $\forall x > 0, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

On a, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, x]$, $0 \leq t \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{t}{2}$ d'après 3-1.

D'où, $\frac{1}{x^2} \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int \frac{t}{2} dt = \frac{1}{4}$ et finalement pour $x > 0, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

On a par ailleurs que $\varphi'(0) = 0$ et que φ est paire donc φ' impaire. Par suite :

Conclusion : $\forall x \in R, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3-3) Equation $\varphi(x) = x$.

Soit $\psi(x) = \varphi(x) - x, \psi'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$ d'après ce qui précède.

ψ est donc décroissante sur R .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

ψ étant continue, elle réalise une bijection de R sur R et ceci assure l'existence d'un unique réel α tel que $\psi(\alpha) = 0$, c'est à dire $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Conclusion : L'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution notée α .

Encadrement de α .

$\psi(0) = \varphi(0) - 0 = 1, \psi(1) = \varphi(1) - 1 < 0$ car $\forall x \neq 0, \varphi(x) < 1$ et donc $\alpha \in]0, 1[$.

3-4) φ est dérivable sur R et $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$. L'inégalité des accroissements finis appliquée sur

l'intervalle d'extrémités α et u_n s'écrit : $|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ soit :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ et par suite on a :

$\forall n \in N, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ (récurrence immédiate!). Dès lors, comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

4°) Résolution de l'équation différentielle $x^2 y' + xy = \text{Arctan}(x)$.

4-1) Sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, l'équation différentielle s'écrit : $xy' + y = f(x)$.

Or $xy' + y$ est la dérivée de $x \mapsto xy(x)$, d'où $xy(x) = \int f(t)dt + \lambda$.

Conclusion : Sur chacun des deux intervalles les solutions sont de la forme : $y(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{x}$.

4-2) Solution de l'équation différentielle sur R .

Une telle solution doit s'écrire :

$y(x) = \{\varphi(x) + \frac{\lambda_1}{x} \text{ pour } x < 0 \varphi(x) + \frac{\lambda_2}{x} \text{ pour } x > 0$ et il faut trouver

λ_1 et λ_2 pour que l'on puisse prolonger cette fonction en 0 en une fonction dérivable en 0.

La possibilité de prolonger par continuité en 0 nécessite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et alors $y(x) = \varphi(x)$,

dont on a vu qu'elle était bien une fonction dérivable sur R .

Conclusion : φ est la seule solution de l'équation différentielle sur R .

Problème d'algèbre

1°) Soit ψ l'endomorphisme de E de matrice $A = \frac{1}{4}(-1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1)$ relativement à la base B .

1-1) $\psi' = \frac{4}{3}\psi$ est l'endomorphisme de matrice $A' = \frac{1}{3}(-1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1)$. ψ' est une isométrie:

En effet, $B = (e_1, e_2, e_3)$ étant une base orthonormée, on a :

$$\|\psi'(e_1)\| = \|\psi'(e_2)\| = \|\psi'(e_3)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1 \text{ et}$$

$$\langle \psi'(e_1), \psi'(e_2) \rangle = \langle \psi'(e_1), \psi'(e_3) \rangle = \langle \psi'(e_2), \psi'(e_3) \rangle = \frac{1}{9}(-2 - 2 + 4) = 0 \text{ ce qui fait}$$

que

ψ' transforme une base orthonormée en une base orthonormée. cqfd.

Ensemble des vecteurs invariants.

Soit $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ un vecteur invariant par ψ' , on doit avoir :

$$\frac{1}{3}(-1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1 \ 2 \ 2 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ soit le système :}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \text{ . Celui-ci est}$$

$$\text{équivalent à : } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \text{ soit}$$

finalement $x_1 = x_2 = x_3$.

L'ensemble des vecteurs invariants est la droite vectorielle D engendrée par

$$u_0 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Cette isométrie vectorielle est donc une rotation vectorielle d'axe D et on a :

$$\forall v \in D, \quad \psi'(v) = \cos\theta v + \sin\theta \frac{u_0}{\|u_0\|} \wedge v, \quad \theta \text{ étant une mesure de l'angle de la rotation.}$$

$$e_1 - e_2 \in D \text{ et } \psi'(e_1 - e_2) = -e_1 + e_2 \text{ donc } \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \text{ et donc } \theta = \pi.$$

Conclusion : $\frac{4}{3}\psi$ est le demi tour d'axe dirigé par $u_0 = e_1 + e_2 + e_3$.

1-2) $\psi = \frac{3}{4}\psi' = \frac{3}{4}Id \circ \psi' = \psi' \circ \frac{3}{4}Id$ et donc ψ est le produit de l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{3}{4}$ et du demi tour précédent.

2°) Soit $S = \{\phi \in L(E) ; \exists k \in [0, 1[; \forall x \in E, \|\phi(x)\| \leq k\|x\|\}$.

2-1) Montrons que $\psi \in S \cap GL(E)$.

On a que $\psi \in GL(E)$ comme produit de deux automorphismes de E . (à savoir $\frac{3}{4}Id$ et l'isométrie ψ').

Par ailleurs, $\forall x \in E, \|\psi(x)\| = \frac{3}{4}\|x\|$ et donc $\psi \in S$. ($k = \frac{3}{4}$ convient)

Conclusion : $\psi \in S \cap GL(E)$.

2-2) $Id_E \notin S$ car $\forall x \in E, \|Id_E(x)\| = \|x\|$ et donc $\forall k \in [0, 1[, \|Id_E(x)\| > k\|x\|$.

2-3) Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments de S . Alors, $\exists k_1$ et $k_2 \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in E, \|\phi_1(x)\| \leq k_1\|x\| \text{ et } \forall x \in E, \|\phi_2(x)\| \leq k_2\|x\|.$$

On a alors : $\forall x \in E, \|\phi_1 \circ \phi_2(x)\| \leq k_1\|\phi_2(x)\| \leq k_1k_2\|x\|$ avec $k_1k_2 \in [0, 1[$ et donc

$$\phi_1 \circ \phi_2 \in S.$$

Conclusion : S est stable pour $\circ$.

$S \cap GL(E)$ n'est pas un sous groupe de $GL(E)$ car tout sous groupe de $GL(E)$ contient Id_E . Or si $Id_E \notin S \cap GL(E)$. **Conclusion** : $S \cap GL(E)$ n'est pas un sous groupe de $GL(E)$

2-4) Soit $\phi \in S$ et $x \in \text{Ker}(\phi - Id_E)$. Alors, $\phi(x) = x$ donc $\|\phi(x)\| = \|x\|$, or par ailleurs

$$\|\phi(x)\| \leq k\|x\| \text{ avec } k \in [0, 1[. \text{ On devrait donc avoir } \|x\| \leq k\|x\| \text{ ce qui n'est possible que}$$

si

$$\|x\| = 0 \text{ soit } x = 0_E.$$

On en déduit que $\phi - Id_E$ est un endomorphisme injectif, et comme E est de dimension finie,

$\phi - Id_E$ est en fait bijectif, autrement dit $\phi - Id_E \in GL(E)$.

2-5) Soit $\phi \in S$, donc $\exists k \in [0, 1[, \|\phi(x)\| \leq k\|x\|$. Mais alors,

$$\forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \|\phi(x)\| \leq k.$$

Réciproquement, soit $\phi \in L(E)$, tel que $\exists k \in [0, 1[; \|x\| = 1 \Rightarrow \|\phi(x)\| \leq k$.

On a évidemment $\phi(0_E) = 0_E$ et donc $0 = \|\phi(0_E)\| \leq k\|0_E\| = 0$.

Soit maintenant $x \in E; x \neq 0_E$. $\phi(x) = \|x\|\phi(\frac{x}{\|x\|})$ avec $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ donc :

$$\|\phi(x)\| = \|x\|\|\phi(\frac{x}{\|x\|})\| \leq k\|x\| \text{ et donc } \phi \in S.$$

Conclusion : $\phi \in S$ si et seulement si $\exists k \in [0, 1[; \forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \|\phi(x)\| \leq k$.

2-6) Soit $\phi \in L(E)$ et (e'_1, e'_2, e'_3) une base orthonormée dans laquelle la matrice de ϕ est :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \{1, 2, 3\}, |\lambda_i| < 1.$$

$$\text{On a alors pour } x = x_1e'_1 + x_2e'_2 + x_3e'_3, \phi(x) = \lambda_1x_1e'_1 + \lambda_2x_2e'_2 + \lambda_3x_3e'_3.$$

$$\text{D'où } \|\phi(x)\|^2 = \lambda_1^2x_1^2 + \lambda_2^2x_2^2 + \lambda_3^2x_3^2 \leq [\max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \text{ soit, en posant}$$

$$k = \sqrt{\max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)} < 1, \|\phi(x)\| \leq k\|x\|. \quad \text{Rq: } k = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|).$$

Conclusion : $\phi \in S$.

3°) Soit μ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à B est

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-1) On définit $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

Il est clair que ces trois vecteurs sont normés.

On a aussi, de manière évidente, que $e'_1 \perp e'_2$ et l'on constate que $e'_3 = e'_1 \wedge e'_2$.

(e'_1, e'_2, e'_3) est donc bien une base B' orthonormée de E .

3-2) Matrice de μ dans B' .

Si on note P la matrice de passage de B à B' , on pourrait utiliser la formule $M' = P^{-1}MP$, soit ici $M' = PMP$ puisque $P^{-1} = P$. On peut procéder directement en calculant :

$$\mu(e_1') = \frac{1}{6\sqrt{3}}[(3e_1 + e_2 - e_3) - (e_1 + 3e_2 + e_3) - (-e_1 + e_2 + e_3)] = \frac{1}{2\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3).$$

$$\text{D'où : } \mu(e_1') = \frac{1}{2}e_1'.$$

$$\mu(e_2') = \frac{1}{6\sqrt{2}}[(3e_1 + e_2 - e_3) + (e_1 + 3e_2 + e_3)] = \frac{1}{6\sqrt{2}}(4e_1 + 4e_2) = \frac{\sqrt{2}}{3}(e_1 + e_2).$$

$$\text{D'où } \mu(e_2') = \frac{2}{3}e_2'.$$

$$\mu(e_3') = \frac{1}{6\sqrt{6}}[(3e_1 + e_2 - e_3) - (e_1 + 3e_2 + e_3) + 2(-e_1 + e_2 + e_3)] = 0_E.$$

La matrice de μ dans B' est donc $M' = \left(\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{2}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\right)$. D'après 2-6, $\mu \in S$.

4°) Soit ϕ_α l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à B est

$$M_\alpha = \alpha(1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1).$$

4-1) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

$$\phi_\alpha(x) = \alpha[(x_1 - x_2)e_1 + (x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - x_3)e_3].$$

$$\|\phi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2] \text{ soit :}$$

$$\|\phi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2[2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3] = \alpha^2[1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2]$$

4-2) Soit $x = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$ on a :

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ 1 \ -\sqrt{2} \ \sqrt{3} \ -1 \ -\sqrt{2} \ 0 \ 2)(x_1' \ x_2' \ x_3') \text{ de sorte que}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[(\sqrt{2}x_1' + \sqrt{3}x_2' + x_3') - (-\sqrt{2}x_1' + \sqrt{3}x_2' - x_3') - (-\sqrt{2}x_1' + 2x_3')]$$

soit :

$$x_1 - x_2 - x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[3\sqrt{2}x_1'] = \sqrt{3}x_1'. \text{ Par suite : } \|\phi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1 + 3x_1'^2).$$

Comme on a toujours $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$, $x_1'^2 \leq 1$ et donc $\|\phi_\alpha(x)\|^2 \leq 4\alpha^2$ soit :

$$\textbf{Conclusion} : \|\phi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|.$$

L'inégalité précédente devient une égalité si le vecteur unitaire x a sa composante x_1' qui vérifie $x_1'^2 = 1$. On obtient donc deux vecteurs réalisant l'égalité : $x = \pm e_1'$.

4-3) D'après 2-5, $\phi_\alpha \in S$ si et seulement si $\exists k \in [0, 1[; \forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \|\phi_\alpha(x)\| \leq k$.

Donc si $|\alpha| < \frac{1}{2}$, on a $\forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \|\phi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha| = k < 1$ et $\phi_\alpha \in S$.

si $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$, alors il existe x unitaire ($x = e_1'$) tel que $\|\phi_\alpha(x)\| = 2|\alpha| \geq 1$ et $\phi_\alpha \notin S$.

$$\textbf{Conclusion} : \phi_\alpha \in S \text{ si et seulement si } |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

5°) Application affine f associée à un endomorphisme ϕ élément de S .

$$\forall M \in E, f(\vec{O}).f(M) = \phi(\vec{OM})$$

5-1) Points invariants par f .

$$f(M) = M \Leftrightarrow f(\vec{O}).M = \phi(\vec{OM}) \text{ soit } f(\vec{O}).O + \vec{OM} = \phi(\vec{OM}) \text{ c'est à dire :}$$

$$f(\vec{O}).O = \phi(\vec{OM}) - \vec{OM} \text{ et enfin } f(\vec{O}).O = (\phi - Id_E)(\vec{OM}).$$

5-2) On a vu en 2-4 que pour tout $\phi \in S$, $\phi - Id_E$ est bijective. Donc il existe un seul vecteur $\vec{u}$ tel que $(\phi - Id_E)(\vec{u}) = f(\vec{O}).O$ et un seul point Ω tel que $\vec{O}\Omega = \vec{u}$.

Conclusion : f a un seul point invariant.

5-3) $\forall (A, B) \in E^2, f(A).f(B) = \phi(\vec{AB})$, donc en particulier, comme $f(\Omega) = \Omega$ on a :

$$\forall M \in E, \Omega.f(M) = \phi(\vec{\Omega M}).$$

5-4) Soit la suite de points définie par $M_0 \in E, \forall n \in N, M_{n+1} = f(M_n)$.

5-4-1) On a $\Omega\vec{M}_{n+1} = \phi(\Omega\vec{M}_n)$. Donc $\|\Omega\vec{M}_{n+1}\| \leq k\|\Omega\vec{M}_n\|$ et par une récurrence immédiate :

$$\|\Omega\vec{M}_n\| \leq k^n \|\Omega\vec{M}_0\|. \text{ Comme } k \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0, \text{ et donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Omega\vec{M}_n\| = 0.$$

5-4-2) Soient les suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in R$ et

$$\forall n \in N, \{x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}y_n + 1, y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n + \frac{1}{2}, z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}z_n + 1\}$$

Soit $M_n \in E$ de coordonnées (x_n, y_n, z_n) . On a que $M_{n+1} = f(M_n)$ où f est

l'application affine, d'endomorphisme associé ϕ et telle que $f(O)$ a pour coordonnées $(1, \frac{1}{2}, 1)$.

La matrice de ϕ dans B est $\frac{1}{4}(1 \ - \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ - \ 1)$. On a donc $\phi = \phi_{\frac{1}{4}}$ qui est bien

un élément

de S .

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Omega\vec{M}_n\| = 0$, Ω étant l'unique point invariant de f . Les coordonnées de

Ω vérifient donc :

$$\{x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1, y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1\} \Leftrightarrow \{3x + y = 4, 3y - z = 2, -x + 5z = 4\}$$

qui admet pour solution :

$$(x = 1, y = 1, z = 1).$$

On a que $\|\Omega\vec{M}_n\|^2 = (x_n - 1)^2 + (y_n - 1)^2 + (z_n - 1)^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ donc les trois suites $(x_n)_{n \in N}, (y_n)_{n \in N}, (z_n)_{n \in N}$ sont convergentes vers la même limite 1.

FIN