

Тема: Паралелепіпед

<https://youtu.be/FP93ajYmm9o>

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення паралелепіпеду та його елементів; навчати відрізняти паралелепіпеди за їх видами; засвоїти теорему про діагоналі прямокутного паралелепіпеду;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву; вміння відрізняти паралелепіпеди за їх видами; застосовувати отримані знання до розв'язування задач;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

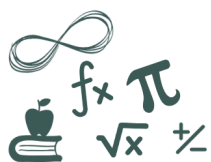
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

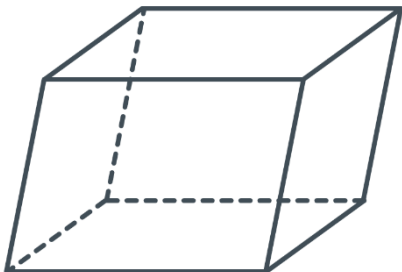
II. Актуалізація опорних знань

- Які паралелепіпеди Вам вже відомі?
(В попередніх класах учні вивчали прямокутний паралелепіпед, куб)
- Сформулюйте теорему Піфагора
- Яка призма є прямою?
- Яка призма є правильною?
- Як можна знайти площу бічної поверхні прямої призми?
- Як знайти площу повної поверхні призми?



III. Вивчення нового матеріалу

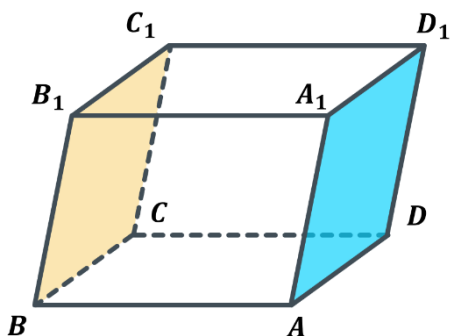
• Паралелепіпед



Паралелепіпед – це призма, основами якої є паралелограми.

- ☐ Яким многокутником є будь-яка грань паралелепіпеда?
(Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом)

- ☐ Які грані паралелепіпеда є протилежними?



Дві несусідні грані паралелепіпеда називаються **протилежними гранями паралелепіпеда**.

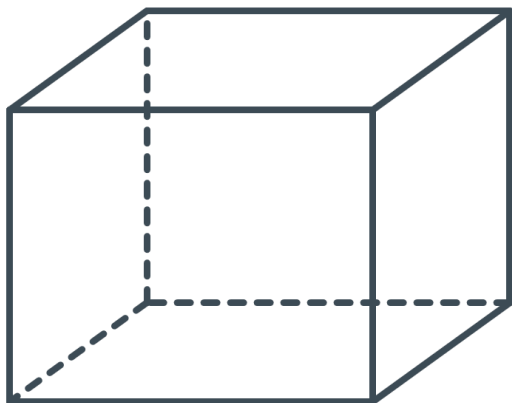
$$BB_1C_1C \parallel AA_1D_1D$$

Будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах

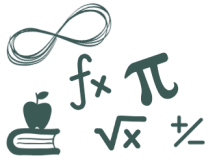
- ☐ Як можемо довести це твердження?
(Так як $BB_1 \parallel AA_1$ і $B_1C_1 \parallel A_1D_1$, то за ознакою паралельності площин $BB_1C_1C \parallel AA_1D_1D$)

- ☐ Наведіть власні приклади протилежних граней цього паралелепіпеда
(Учні висловлюють власну думку)

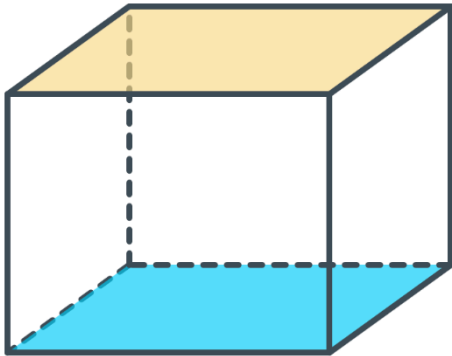
• Прямий паралелепіпед



Паралелепіпед називається **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

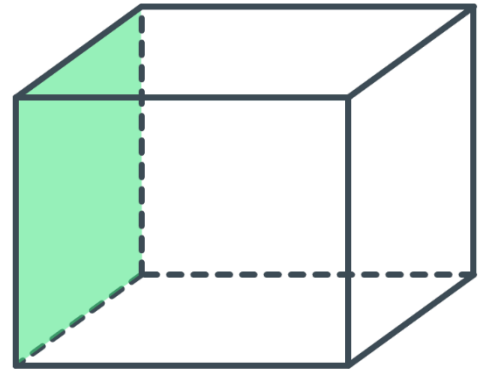


- Що може бути основами прямого паралелепіпеда?
(Учні висловлюють власну думку)

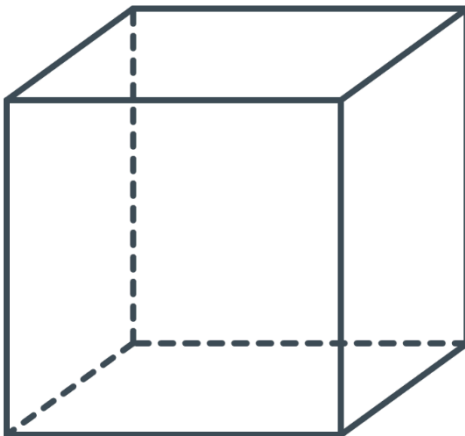


Основи прямого паралелепіпеда – паралелограми

- Чим є всі бічні грані паралелепіпеда?
(У прямого паралелепіпеда Всі бічні грані - прямокутники)

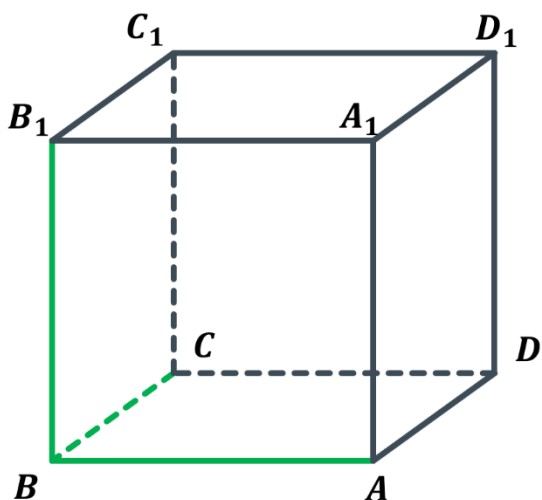
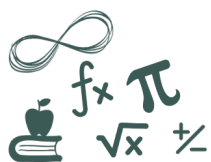


• Прямокутний паралелепіпед



Прямокутний паралелепіпед – це прямий паралелепіпед, основами якого є прямокутники.

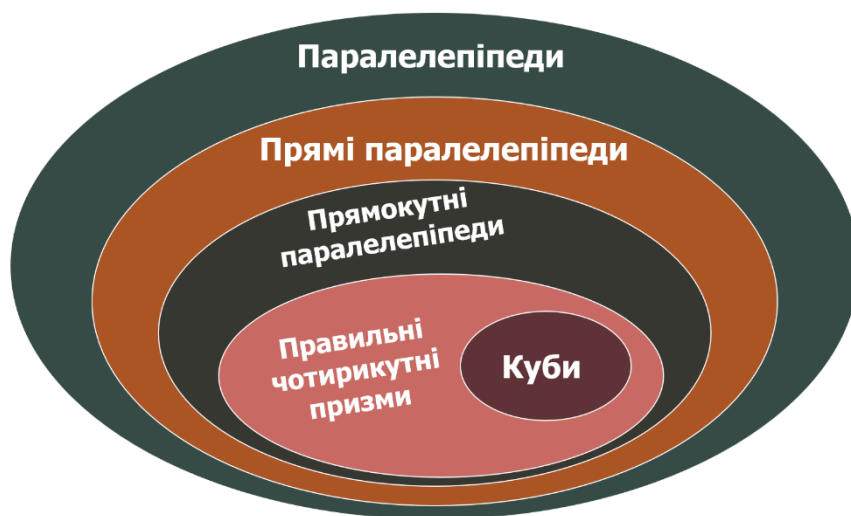
- Що можемо сказати про усі грані прямокутного паралелепіпеда?
(Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками)



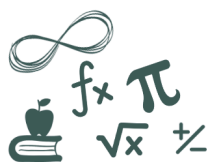
Виміри прямокутного паралелепіпеда – це довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини.

Довжини ребер BA , BC , BB_1 – виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

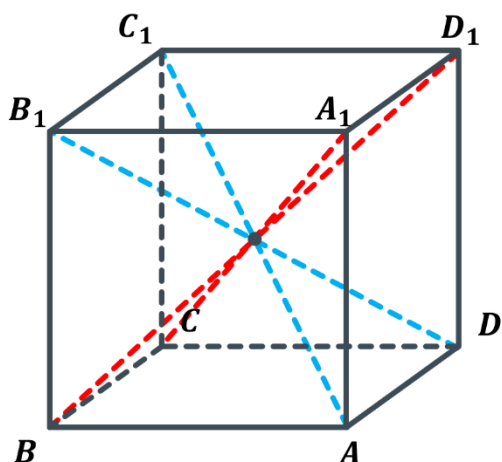
- ☐ Яку умову необхідно накласти на виміри прямокутного паралелепіпеда для того, щоб він був кубом?
(Всі три його виміри мають бути рівними)
- ☐ Якими многокутниками є усі грані куба?
(Усі грані куба є квадратами)



Види паралелепіпедів



- ☐ Скільки діагоналей має паралелепіпед?
(Учні висловлюють власну думку)

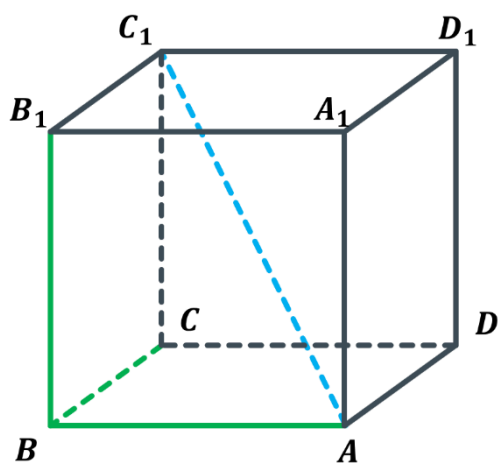


Паралелепіпед має 4 діагоналі.

Діагоналі будь-якого паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою навпіл.

Теорема (про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда)

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його трьох вимірів.



$$AC_1^2 = BA^2 + BC^2 + B_1B^2$$

Доведення:

- ☐ З $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, як можемо знайти AC ?

За теоремою Піфагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- ☐ З $\triangle ACC_1$ $\angle C_1 = 90^\circ$, як можемо знайти AC_1 ?

За теоремою Піфагора:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$$

- ☐ Чи дорівнює бічне ребро CC_1 ребру BB_1 ?

(Так, отже можемо виразити AC_1^2 в більш зручній формі для доведення теореми)

$$AC_1^2 = AC^2 + BB_1^2$$

□ Який робимо висновок?

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad AC_1^2 = AC^2 + BB_1^2 \quad | \Rightarrow AC_1^2 = BA^2 + BC^2 + B_1B^2$$

Доведено

□ Який можемо зробити висновок з цієї теореми?

(Учні висловлюють власну думку)

З теореми виливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

IV. Розв'язування задач

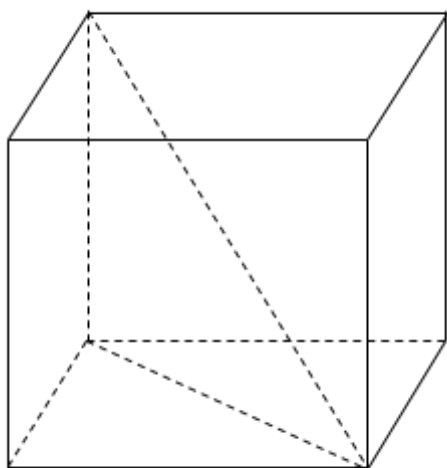
№1

Чи можна вважати правильним таке означення куба: «Кубом називають правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює стороні основи?»

Відповідь: так, так як в такому випадку всі три виміри призми будуть рівними

№2

Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту паралелепіпеда.



Дано:

$MATHNOVA_1$ – прямокутний

паралелепіпед

$MA = 5$ см

$MH = 12$ см

$\angle VHA = 60^\circ$

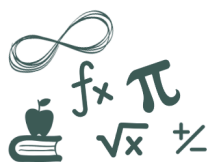
Знайти:

VA –?

Розв'язок:

Розглянемо $\triangle AMH$:

$$\angle AMH = 90^\circ \text{ (основа прямокутник)} \quad MA = 5 \text{ см} \quad MH = 12 \text{ см} \quad | \Rightarrow AH = \sqrt{MA^2 + MH^2}$$



$$AH = \sqrt{MA^2 + MH^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ см}$$

Розглянемо $\triangle VAH$:

$$\angle A = 90^\circ \quad \angle H = 60^\circ \quad AH = 13 \text{ см} \quad H = \frac{VA}{AH} \mid \Rightarrow VA = 60^\circ \cdot AH = 13\sqrt{3}$$

Відповідь: $13\sqrt{3}$

№3

Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см

Розв'язок:

За теоремою про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда, **квадрат** будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює **сумі квадратів** його трьох вимірів.

Отже, діагональ прямокутного паралелепіпеда:

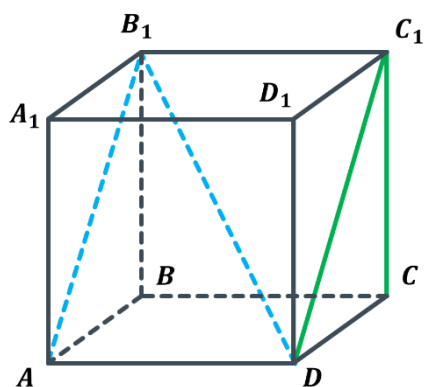
$$\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Відповідь: 7 см

№4

Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:

- 1) Між прямою DC_1 і площиною BCC_1 ;
- 2) Між прямою $B_1 D$ і площиною ABB_1 ;



Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямокутний паралелепіпед;

$$AB = 5 \text{ см}$$

$$AD = 7 \text{ см}$$

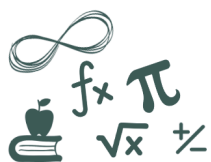
$$AA_1 = 12 \text{ см}$$

Знайти:

$$\angle CC_1 D \text{ —?}$$

$$\angle AB_1 D \text{ —?}$$

Розв'язок:



1) Кут між прямою DC_1 і площиною BCC_1 – це кут між прямими DC_1 і C_1C ,
 $\angle DC_1C$

Розглянемо $\triangle DCC_1$:

$$\angle C = 90^\circ \quad DC = AB = 5 \text{ см} \quad CC_1 = AA_1 = 12 \text{ см} \quad | \Rightarrow C_1 = \frac{DC}{CC_1} = \frac{5}{12}$$

$$\angle CC_1D = \arctg \frac{5}{12}$$

2) Кут між прямою B_1D і площиною ABB_1 – це кут між прямими
 B_1D і AB_1 , $\angle AB_1D$

Розглянемо $\triangle AB_1B$:

$$\angle B = 90^\circ \quad AB = 5 \text{ см} \quad B_1B = AA_1 = 12 \text{ см} \quad | \Rightarrow AB_1 = \sqrt{AB^2 + B_1B^2}$$

$$AB_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ см}$$

Розглянемо $\triangle B_1AD$:

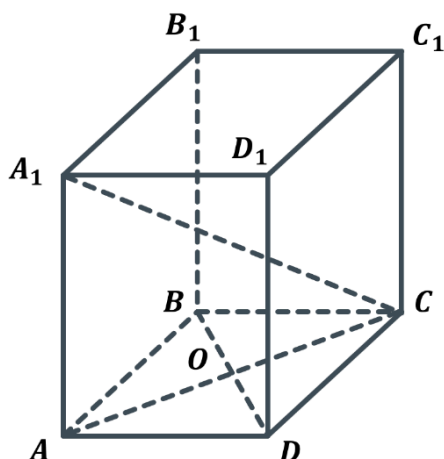
$$\angle A = 90^\circ \quad AB_1 = 13 \text{ см} \quad AD = 7 \text{ см} \quad | \Rightarrow B_1 = \frac{AD}{AB_1} = \frac{7}{13}$$

$$\angle AB_1D = \arctg \frac{7}{13}$$

$$\text{Відповідь: 1) } \arctg \frac{5}{12}; \text{ 2) } \arctg \frac{7}{13}$$

№5

Основа прямого паралелепіпеда – ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.



Дано:

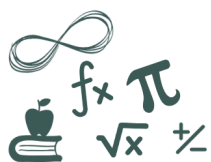
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямий паралелепіпед;

$ABCD$ – ромб;

$\angle BAD = \angle BCD = \alpha$;

$BD = d$;

$\angle A_1CA = \beta$;



Знайти:

$$S_6 - ?$$

Розв'язок:

Так як діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл, то:

$$BO = OD = \frac{d}{2}$$

$$\angle BCO = \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BO}{\sin \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2 \sin \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow OC = \frac{BO}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$P_{\text{осн}} = 4BC = 4 \cdot \frac{d}{2 \sin \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2d}{\sin \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Розглянемо ΔA_1AC :

$$\angle A = 90^\circ \quad AC = 2OC = \frac{d}{\frac{\alpha}{2}} \quad \angle C = \beta \mid \Rightarrow A_1A = AC \cdot \beta = \frac{d \cdot \beta}{\frac{\alpha}{2}}$$

$$S_6 = P_{\text{осн}} \cdot A_1A = \frac{2d}{\sin \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d \cdot \beta}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2d^2 \beta}{\sin \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\alpha}{2}}$$

Відповідь: $\frac{2d^2 \beta}{\sin \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\alpha}{2}}$

V. Підсумок уроку

- Поясніть, яке тіло називається паралелепіпедом?
- Доведіть, що протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні
- Які бувають паралелепіпеди?
- Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда
- Що ми називаємо вимірами прямокутного паралелепіпеда?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §4 п.17 Виконати № 17.4; 17.6; 17.10	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §2 Виконати № 2.3; 2.7; 2.11; 2.15; 2.19; 2.29	Істер О.С.
Опрацювати §2 Виконати № 2.2; 2.4; 2.6; 2.8; 2.13; 2.15	Нелін Є.П.
Опрацювати §17 Виконати № 618; 620; 636; 637	Бевз Г.П.