

Câu 45. [1D5-1.1-3] (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hàm số

$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

A. $S = 2(3 - 2\sqrt{2})$. B. $S = 2(1 + 4\sqrt{2})$. C. $S = 2(3 - 4\sqrt{2})$. D. $S = 2(3 + 2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn B.

+ Khi $0 < x < x_0$: $f(x) = a\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0; x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0; x_0)$.

+ Khi $x > x_0$: $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0; +\infty)$.

+ Tại $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a\sqrt{x} - a\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{a}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x + x_0) = 2x_0$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$$

Khi đó $f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$ và $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $\frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0} \quad (1)$

Mặt khác: Hàm số f liên tục tại x_0 nên $x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0 = 2$ và $a = 8\sqrt{2}$

Vậy $S = a + x_0 = 2(1 + 4\sqrt{2})$.

Câu 42. [1D5-1.1-3] (SỞ GD -ĐT HẬU GIANG -2018) Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$.

Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

A. $L = 2017.2^{2018} + 1$. **B.** $L = 2019.2^{2017} + 1$. **C.** $L = 2017.2^{2018} - 1$. **D.** $L = 2018.2^{2017} + 1$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2018x^{2017} \Leftrightarrow x.f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018} \\ \Leftrightarrow x.f'(x) &= (2x - x) + (3x^2 - x^2) + (4x^3 - x^3) + \dots + (2018x^{2017} - x^{2017}) + 2018x^{2018} \\ \Leftrightarrow x.f'(x) &= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2018x^{2018}) - (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017}) + 2018x^{2018} \\ \Leftrightarrow x.f'(x) &= f'(x) - \frac{1 - x^{2018}}{1 - x} + 2018x^{2018} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2018x^{2018}}{(x-1)} + \frac{1 - x^{2018}}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 2018.2^{2018} + 1 - 2^{2018} = 2017.2^{2018} + 1$$

Câu 41: [1D5-1.1-3] (ĐẠNG THỪA HÚC NGHỆ AN-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = -6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ . Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Khi đó

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2$, $b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 39: [1D5-1.1-3] (SỞ GD-ĐT BẮC NINH -2018) Xét các mệnh đề sau:

(1). Nếu hàm số $f(x) = |x|$ thì $f'(0) = 0$.

(2). Nếu hàm số $f(x) = |x^{2017}|$ thì $f'(0) = 0$.

(3). Nếu hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 1|$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
Những mệnh đề đúng là?

A. (1); (2).

B. (2); (3).

C. (1); (2); (3).

D. (2).

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Do đó, $f'(0) = 1$. Vậy (1) sai.

Ta có: $f(x) = |x^{2017}| = \begin{cases} x^{2017} & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^{2017} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2017x^{2016} & \text{khi } x \geq 0 \\ -2017x^{2016} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Do đó, $f'(0) = 0$. Vậy (2) đúng.

Ta có: $f(x) = |x^2 - 3x + 1| = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{khi } x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ -x^2 + 3x - 1 & \text{khi } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Suy ra $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ -2x + 3 & \text{khi } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Do đó, với $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (l)$.

Với $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (n)$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm, do đó (3) sai.

Câu 25: [1D5-1.1-3] (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI - KỲ 2 LỚP 11-2017) Cho hàm số

$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & \text{khi } x > 0 \\ x+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Khẳng định nào là đúng về đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$?

A. $f'(0) = 1$.

B. $f'(0) = -1$.

C. $f'(0) = 0$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$+ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{x(\sqrt{4x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ hay không tồn tại đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = 0$.