



CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Physique PC

durée 4 heures

**ETUDE DE QUELQUES PHENOMENES ASSOCIES AUX
MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS.**

Un matériau supraconducteur présente une transition de phase à une température dite "critique" T_c . Dans la phase correspondant aux hautes températures ($T > T_c$), il se comporte comme un matériau normal (phase « Normale »). A toute température T inférieure à T_c (phase « Supraconductrice »), il est caractérisé par deux propriétés macroscopiques remarquables : sa résistance électrique est nulle (Effet supraconducteur) et aucun champ magnétique appliqué ne peut le pénétrer (Effet Meissner). De plus, pour $T < T_c$, cette phase supraconductrice disparaît lorsqu'un champ magnétique supérieur à un champ magnétique critique $B_c(T)$ est appliqué au matériau. (la variation de $B_c(T)$ est donnée sur la figure 1).

Dans ce problème, nous examinerons successivement la non pénétration du champ magnétique à l'intérieur d'un matériau supraconducteur, la transition

Tournez la page S.V.P.

de phase « Normal/Supraconducteur » proprement dite et enfin la dynamique de pénétration de ce champ lorsque son intensité est supérieure au champ critique $B_c(T)$. Ces trois parties sont indépendantes. Dans tout le problème, les vecteurs sont notés en gras, par exemple le vecteur champ magnétique est représenté par $\mathbf{B}$.

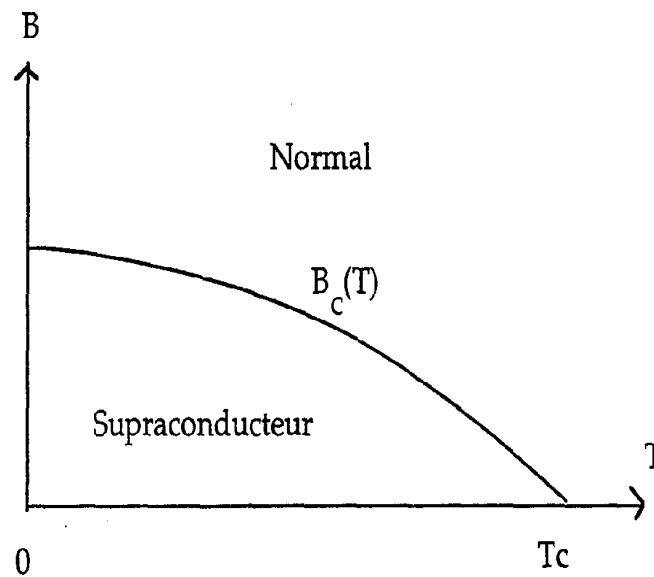


Figure 1

Partie A: Effet Meissner. Champ magnétique à l'intérieur du matériau supraconducteur.

En 1935, les frères F et H. London publient un article décrivant théoriquement « l'effet Meissner ». Dans un premier temps l'équation décrivant le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur qu'ils ont obtenue sera établie dans une géométrie cylindrique puis nous utiliserons cette équation pour calculer le champ et l'aimantation à l'intérieur d'une plaque supraconductrice.

1: Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique extérieur, des courants (de densité $\mathbf{j}$) apparaissent pour s'opposer à la variation de flux magnétique à l'intérieur du matériau. Pour un matériau cylindrique d'axe Oz, ces courants sont ortho-radiaux si le champ appliqué est selon Oz. Soient $\mathbf{v}_s(t)$ la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, e leur charge électrique et n_s leur nombre volumique. Ecrire l'équation de mouvement de chaque porteur (on prendra en compte le fait que, par définition, il n'y a pas de terme d'amortissement du mouvement des porteurs dans un matériau supraconducteur et on négligera le terme magnétique). En écrivant la relation entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{v}_s$, montrer que:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Donner l'expression de λ en fonction de m , n_s , e et μ_0 . Montrer que λ , est homogène à une longueur. Calculer λ dans le cas de l'Aluminium pour lequel

$m = 0.9 \cdot 10^{-30}$ kg, $n_s = 180 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

2: Dans toute la suite, on se place en régime quasi-stationnaire. Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point). Ecrire les équations de Maxwell pour les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en présence de la densité de courant $\mathbf{j}$ déterminée en 1. En déduire que le champ $\mathbf{B}$ doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\text{rot} \left(\text{rot} \mathbf{B} \right) + \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} \right]$$

Tournez la page S.V.P.

3: Les frères London ont postulé que la solution à retenir était de la forme

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = 0$$

En utilisant la relation vectorielle $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$, en déduire que le champ $\mathbf{B}$ doit satisfaire à l'équation dite "de London":

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\lambda^2} = 0$$

Dans la suite de cette partie, nous ne considérerons plus maintenant que le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et z , d'épaisseur $2d$ dans la direction y ; l'origine des espaces O étant choisie au centre de la plaque.

4 : On applique le champ $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z$, uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ $\mathbf{B} = B(y) \mathbf{u}_z$ dans le matériau. Ecrire la solution générale de l'équation obtenue en 3.

5 : Les courants étant considérés dans cette partie comme répartis dans le volume du matériau, il n'y a pas à proprement parler de courants surfaciques aux interfaces vide-supraconducteur. En déduire les conditions aux limites devant être satisfaites par la solution générale dans la géométrie proposée. En déduire l'expression de $\mathbf{B}(y)$ en fonction de B_0 , y , λ et d . Tracer l'allure du graphe de $B(y)$ dans le cas où $\lambda \ll d$. Sur quelle distance varie la valeur de B à l'intérieur du supraconducteur ?

6: A partir de l'expression obtenue pour le champ dans la question précédente, calculer l'expression de la densité volumique de courant $\mathbf{j}$. Tracer l'allure du graphe de $j(y)$ dans le cas où $\lambda \ll d$. Commenter.

7: On souhaite désormais décrire le matériau supraconducteur comme un milieu magnétique : la densité de courant $\mathbf{j}$ dans le supraconducteur est alors

considérée comme une densité de courants d'aimantation $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{liés}} = \text{rot } \mathbf{M}$ et la densité de courants libres est nulle. On rappelle par ailleurs la relation :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

qui permet de définir $\mathbf{H}$. Dans cette description, on cherche à affecter au matériau des valeurs moyennes spatiales des champs.

7a - La valeur moyenne du champ $\mathbf{B}$ à l'intérieur de la plaque est définie par :

$$\langle B \rangle = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} B(y) dy$$

Calculer cette valeur moyenne en fonction de B_0 , λ , et d .

7.b - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère en absence de courants libres, montrer que $\mathbf{H}$ ne dépend pas de y . En déduire l'expression de $\langle \mathbf{H} \rangle$ en fonction de B_0 et μ_0 en exploitant la condition aux limites en $y = d$ et l'expression de $\mathbf{H}$ dans le vide.

7c - En déduire l'expression de la valeur moyenne de l'aimantation $\langle \mathbf{M} \rangle$ en fonction de B_0 , λ , μ_0 et d . Définir une susceptibilité χ_m , et l'exprimer en fonction de λ , et d . Vérifier que le supraconducteur est un milieu diamagnétique. Vérifier que si $d \gg \lambda$ alors χ_m tend bien vers -1 (diamagnétique parfait). Commenter le cas contraire.

Partie B : Etude thermodynamique de la transition de phase

Considérons un volume unité d'un matériau supraconducteur plongé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Le matériau est décrit comme un milieu magnétique où règnent des champs $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ uniformes, parallèles à un axe Oz, reliés par la relation $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Dans la phase normale, le matériau est non magnétique ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) alors que dans la phase supraconductrice, il peut être

Tournez la page S.V.P.

considéré comme un diamagnétique parfait ($\mathbf{M} = -\mathbf{H}$) (Effet Meissner). On notera M, H et B les projections des vecteurs $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ sur Oz.

On admet que le travail apporté au matériau pour faire varier réversiblement l'aimantation de dM vaut $\delta W = \mu_0 H dM$. On note T la température, S l'entropie et U l'énergie interne; on néglige les variations de volume.

1: Etablir l'identité thermodynamique $dU = T dS + \mu_0 H dM$.

2: On pose $G = U - TS - \mu_0 HM$. Etablir l'identité thermodynamique donnant dG pour des variations dT et dH des variables T et H .

3: On se place dans la phase Normale. Exprimer $G^N(H, T)$ en fonction de $G^N(H=0, T)$

4: On se place dans la phase Supraconductrice. Exprimer $G^S(H, T)$ en fonction de

$G^S(H=0, T)$, μ_0 , et H .

5: A la température $T \leq T_c$, lorsque le champ appliqué atteint le champ critique $H_c(T)$ la transition de phase Normal / Supraconducteur survient. Le graphe $H_c(T)$ est donné sur la figure 1. On admet que G joue le même rôle dans la transition Supraconducteur-Normal que l'enthalpie libre dans la transition liquide-vapeur d'un corps pur. Quelle relation existe-t-il alors entre $G^N(H, T)$ et $G^S(H, T)$. En déduire que :

$$G^S(H=0, T) = G^N(H=0, T) - \frac{\mu_0}{2} H_c^2(T)$$

6: Donner l'expression de l'entropie $S(H, T)$ en fonction de l'énergie libre $G(H, T)$. Calculer la différence d'entropie à champ appliqué nul:

$$S^S(H=0, T) - S^N(H=0, T).$$

7 : Pour toute température $T \leq T_c$, donner la définition de la chaleur latente L de transition "Phase Supraconductrice vers Phase Normale" en fonction de $S^S(H=0, T) - S^N(H=0, T)$ et de la température T . Montrer que cette chaleur latente peut s'écrire:

$$L = -T\mu_0 H_c(T) \frac{dH_c(T)}{dT}$$

A la température T_c , que vaut cette chaleur latente? A la température $T < T_c$, quel est le signe de cette chaleur latente? En déduire ce que l'on observe lorsque la transition est isotherme et lorsque elle est adiabatique.

8: Donner la définition de la capacité calorifique c à H constant à partir de l'entropie S et de la température T . Calculer la différence de capacités calorifiques dans les phases normale et supraconductrice $c^N - c^S$. Montrer que, lorsque le champ appliqué est nul, cette capacité calorifique présente une discontinuité lors de la transition à $T = T_c$.

Partie C : Dynamique de pénétration de la phase Normale dans la phase Supraconductrice à la transition.

Considérons un matériau semi-infini limité par le plan (xOz) , l'axe des y croissants étant orienté vers l'intérieur du matériau. Initialement dans sa phase Supraconductrice ($T < T_c$), ce matériau est soumis à l'instant $t=0$ à un champ extérieur $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ supérieur au champ critique $B_c(T)$. Ceci induit une transition de phase qui impose au matériau de devenir « Normal ». Entre ces deux états d'équilibre (« Supraconducteur » pour $t < 0$ et « Normal » pour t tendant vers l'infini) le matériau est biphasé : sur une épaisseur comprise entre 0 et $y_0(t)$, il est « Normal » tandis que dans le reste du matériau il est encore « Supraconducteur ». Nous admettrons dans cette partie que le champ magnétique est strictement nul dans la phase « Supraconductrice » et que les courants supraconducteurs étudiés dans la partie A pourront être considérés comme de réels courants de surface (λ tend vers 0). Qualitativement, lorsque la

Tournez la page S.V.P.

phase Normale pénètre dans le matériau, la variation du flux magnétique dans cette partie induit une force électromotrice et donc un courant qui crée un champ qui s'oppose à cette variation du flux. C'est la capacité du matériau « Normal » à limiter cette variation de flux qui contrôle la vitesse de pénétration de la phase « Normale » dans la phase « Supraconductrice ». Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier l'équation d'évolution de la position $y_0(t)$ de la frontière entre les deux phases et d'évaluer le temps caractéristique "d'invasion" de la phase « Normale » dans la phase « Supraconductrice ».

1 : On se place en régime quasi-stationnaire. Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point). Ecrire les équations de Maxwell pour les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dans la partie « Normale » du matériau. Ecrire la loi d'Ohm locale correspondante, on notera σ la conductivité du matériau dans la phase Normale. En déduire que :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

2 : En utilisant la relation vectorielle $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$, montrer que l'équation d'évolution du champ magnétique $\mathbf{B}$ dans la partie « Normale » du matériau s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial^2 y} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3 : Donner les conditions aux limites devant être vérifiées par $\mathbf{B}$ en $y=0$ et $y=y_0(t)$.

4 : Par commodité, nous posons $\mathbf{B} = (1+p) \mathbf{B}_c$ et $B(y,t) = (1+f(y,t)) \mathbf{B}_c$, Ecrire l'équation devant être vérifiée par $f(y)$ et les conditions aux limites $f(0,t)$ et $f(y_0(t),t)$.

Nous ne résoudrons pas directement cette dernière équation avec les conditions aux limites correspondantes. Pour obtenir la solution décrivant la variations de $f(y,t)$ et donc $B(y,t)$, nous supposerons que le profil d'évolution

spatiale du champ B est indépendant du temps si on utilise la coordonnée réduite de position $Y = y/y_0(t)$. Nous chercherons donc maintenant une solution de la forme

$$\mathbf{B}(Y) = (1 + F(Y)) \mathbf{B}_c .$$

5: Nous commencerons par établir l'équation devant être vérifiée par $F(Y)$.

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y_0^2} \frac{d^2 F}{dY^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{dF}{dY} \frac{Y}{y_0} \frac{dy_0}{dt}$$

En déduire que l'équation devant être satisfaite par $F(Y)$ s'écrit

$$\frac{d^2 F}{dY^2}(Y) = -\mu_0 \sigma Y \frac{dF}{dY}(Y) y_0(t) \frac{dy_0}{dt}$$

6 : Justifier que la solution retenue permet d'écrire

$$\frac{d(y_0^2)}{dt} = \frac{2\alpha p}{\mu_0 \sigma}$$

où α est une constante sans dimension. En déduire l'équation d'évolution de $y_0(t)$. Donner deux autres exemples de systèmes obéissant à la même équation.

La constante α reste à déterminer en fonction des conditions de la transition, c'est-à-dire du champ magnétique appliqué $\mathbf{B}$ caractérisé par p . Nous allons établir maintenant l'équation devant être satisfaite par α .

7: Montrer que l'équation devant être satisfaite par $F(Y)$ devient alors une équation différentielle du premier ordre en dF/dY .

8: Une condition aux limites sur dF/dY est obtenue en appliquant la loi de Faraday à la partie « Normale » du matériau. Considérons un contour fermé

ABCD dans le plan (xOy), les segments AB et CD sont parallèles à l'axe Ox, AB est situé dans la partie « Normale » du matériau dans le voisinage immédiat de la frontière entre les deux phases (position notée y_0) tandis que CD est loin à l'intérieur de la partie « Supraconductrice » du matériau. Les segments BC et DA sont parallèles à l'axe Oy (Figure 2).

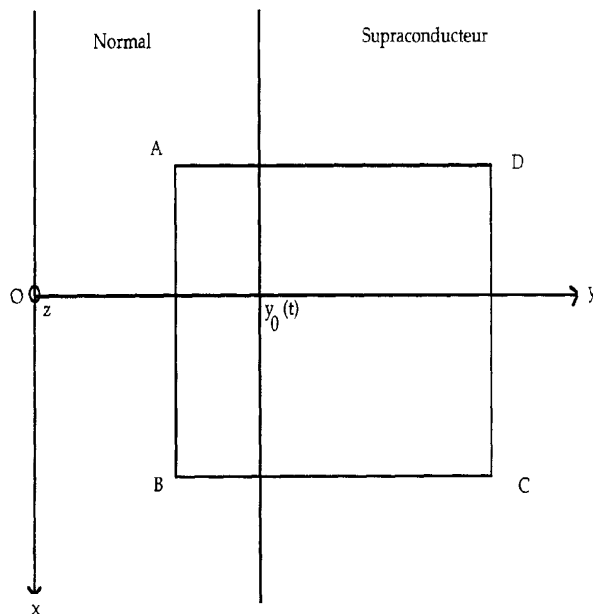


Figure 2

8a- Montrer que E est stationnaire dans le supraconducteur ; dans la suite on admettra qu'il est nul. Déterminer E dans la phase normale en fonction de μ_0, σ et, $\frac{\partial B}{\partial y}$.

8b-En utilisant la loi de Faraday, montrer que

$$E_x(y_0^-) = -B_c \frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial B}{\partial y}$$

En utilisant les notations des questions précédentes, montrer que cette équation est équivalente à :

$$\frac{dF}{dY}(Y=1) = -\alpha p$$

9 : En intégrant l'équation obtenue en 7 et la condition obtenue en 8b, montrer que dF/dY varie comme:

$$\frac{dF}{dY}(Y) = -\alpha p \exp \left[\alpha p \frac{(1 - Y^2)}{2} \right]$$

En déduire l'expression intégrale de $F(1) - F(0)$. Montrer que α est solution de l'équation:

$$1 = \alpha \int_0^1 \exp \left[\alpha p \frac{(1 - Y^2)}{2} \right] dY$$

10 : Dans le cas où $p \ll l$, que vaut α ? En déduire dans ce cas la loi d'évolution avec le temps de la position y_0 . Commenter la dépendance de cette loi avec la conductivité σ du métal normal et la valeur de p .

11: Calculer le temps mis par la phase Normale pour progresser de 1 cm dans un matériau de conductivité $\sigma = 5 \cdot 10^{10} \Omega^{-1}m^{-1}$, p étant pris égal à 0,1.