

Περιγράφοντας το ορθογώνιο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με κάθετες πλευρές $(A\Gamma)=4\text{cm}$ και $(\Gamma\Delta)=3\text{cm}$ σχεδιασμένο σε οριζόντιο λείο επίπεδο, κάθετα στο οποίο επικρατεί ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B . Από την κορυφή A βάλουμε την $t_0=0$, ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο το οποίο διαγράφει τροχιά περιγεγραμμένη του τριγώνου με φορά αντίθετη των δεικτών ρολογιού.

1) Να εξηγήσετε ποια πρέπει να είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας που πρέπει να βάλουμε το σωματίδιο και να υπολογίσετε το μέτρο της.

2) Ποια χρονική στιγμή θα περάσει το σωματίδιο από την κορυφή της ορθής γωνίας για $2^{\text{η}}$ φορά.

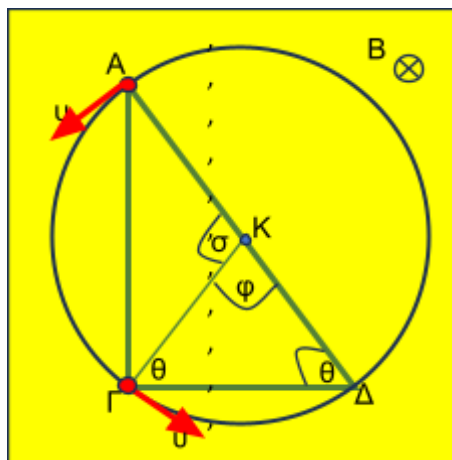
3) Ποιο το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματίδιου κατά την κίνησή του από το A μέχρι το Γ .

4) α) Με εφαρμογή της προηγούμενης σχέσης να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας από το A στο Δ .

β) Ποιες χρονικές στιγμές η μεταβολή της ταχύτητας θα είναι $\max$ και ποιές $\min$
Δίδονται : ειδικό φορτίο $q/m=10^3 \text{ C/Kg}$, $B=2\text{T}$ και αν το ημ γωνίας είναι $0,8$ η γωνία προσεγγίζεται στις 54°

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Βάλλοντας το σωματίδιο μέσα στο ΟΜΤ αυτό θα δεχθεί δύναμη Lorentz κάθετη στην ταχύτητα που θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου για την κυκλική κίνηση και πρέπει η ταχύτητα και η Lorentz να είναι στο οριζόντιο επίπεδο. Η κυκλική τροχιά του σωματιδίου σαν περιγεγραμμένη του τριγώνου και με την προϋπόθεση ότι η γωνία $\hat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθή θα βαίνει σε ημιπεριφέρεια με αποτέλεσμα η υποτεινούσα $A\Delta$ να είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο K στο μέσον της. Τελικά η διεύθυνση της ταχύτητας σαν εφαπτόμενη της τροχιάς θα είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η φορά της θα είναι όπως στο σχήμα έτσι ώστε η Lorentz να κατευθύνεται προς το κέντρο K .



Από το ορθογώνιο $A\Gamma\Delta$ έχουμε :

$$(A\Delta)^2 = (A\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow (A\Delta) = 5\text{cm}$$

$$\text{Η ακτίνα της τροχιάς } R = \frac{(A\Delta)}{2} \Rightarrow R = 2,5\text{cm} = 2,5 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{q}{m} RB \xrightarrow{SI} v = 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \Rightarrow v = 50\text{m/s}$$

Γνωρίζουμε ότι

2) Για να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή που το σωματίδιο θα περάσει από το Γ για

$2^{\text{η}}$ φορά χρειάζεται να υπολογίσουμε την γωνία $\hat{A\hat{K}\Gamma} = \sigma$

Από το ορθογώνιο ΑΓΔ έχουμε : $\eta\mu\theta = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow \theta = 54^\circ$

Το ΓΚΔ είναι ισοσκελές άρα $\hat{K}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{K}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 54^\circ$

Τότε η $\hat{A}\hat{K}\hat{\Gamma} = \sigma = \theta + \theta = 2 \cdot 54 \Rightarrow \sigma = 108^\circ$ σαν εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΓΚΔ

Μετατροπή σε rad: $\left| \begin{matrix} 180^\circ \rightarrow \pi_{rad} \\ 108^\circ \rightarrow \theta_{rad} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \theta_{rad} = \frac{108}{180} \pi$

Η κίνηση είναι ομαλή κυκλική άρα η γωνία στροφής είναι ανάλογη του χρόνου. Έτσι η χρονική στιγμή που για 1^η φορά το σωματίδιο θα περάσει από το Γ θα υπολογιστεί :

$$\sigma = \omega t_1 \Rightarrow \frac{108}{180} \pi = \frac{2\pi}{T} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{108}{360} T \Rightarrow t_1 = \frac{27}{90} \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow t_1 = \frac{27}{45} \frac{m\pi}{qB} \Rightarrow t_1 = \frac{27}{45} \frac{10^{-3} \pi}{2} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{27}{90} 10^{-3} \pi \Rightarrow t_1 = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \Rightarrow t_1 = 0,914 \cdot 10^{-3} s$$

Για την εύρεση της ζητούμενης στιγμής θα προσθέσουμε την διάρκεια μιας στροφής

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi 10^{-3}}{2} = 3,14 \cdot 10^{-3} s$$

που είναι η περίοδος :

$$\text{Τελικά : } t = t_1 + T = 0,914 \cdot 10^{-3} + 3,14 \cdot 10^{-3} \Rightarrow t = 4,054 \cdot 10^{-3} s$$

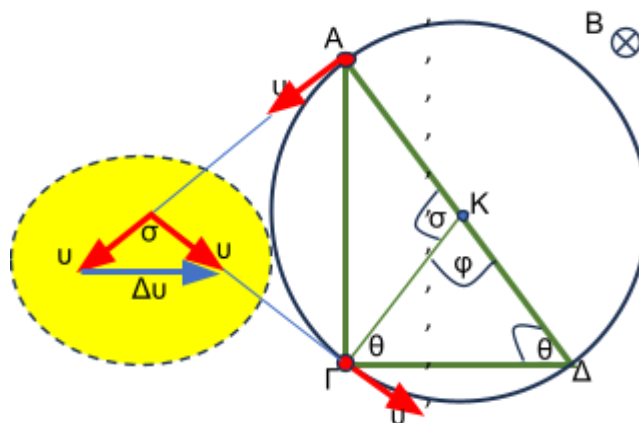
Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την t σκεπτόμενοι αναλογικά ,χωρίς τη μετατροπή

$$\text{σε rad: } \left| \begin{matrix} 360^\circ \rightarrow T \\ (108^\circ + 360^\circ) \rightarrow t \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow t = \frac{468}{360} T \text{ κλπ}$$

3)

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_\tau - \vec{v}_\alpha \Rightarrow \vec{v}_\alpha + \Delta \vec{v} = \vec{v}_\tau$$

Από το νόμο των συν στο ανυσματικό τρίγωνο:



$$(\Delta v)^2 = v^2 + v^2 - 2v \cdot v \cdot \sigma \Rightarrow$$

$$\Delta v = v \sqrt{2(1 - \sigma \nu \sigma)} \Rightarrow$$

$$\Delta v = 50 \sqrt{2(1 - \sigma \nu \sigma)} \frac{m}{s}$$

4)α) Το σωματίδιο θα περάσει από το Δ αφού η γωνία στροφής του γίνει 180^0 , άρα:

$$\Delta v = 50\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\sigma)} \xrightarrow{\sigma=180} \Delta v = 50\sqrt{2(1-(-1))} \Rightarrow \Delta v = 100m/s$$

β) Από τη σχέση $\Delta v = 50\sqrt{2(1-\sigma\upsilon\nu\sigma)}$ βλέπουμε ότι για να είναι max η Δυ πρέπει το συν σ να γίνει min δηλαδή -1, οπότε $\sigma=180^0$. Το σωματίδιο λοιπόν θα φτάνει στο Δ τις χρονικές στιγμές :

$$t = (2\nu - 1)\frac{T}{2} = (2\nu - 1)\frac{3,14 \cdot 10^{-3}}{2} \Rightarrow t = (2\nu - 1)1,57 \cdot 10^{-3} s \text{ με } \nu = 1, 2, 3 \dots$$

Για είναι min η Δυ πρέπει το συν σ να γίνει max δηλαδή +1, οπότε $\sigma=360^0$ και οι χρονικές στιγμές θα είναι:

$$t = nT = n3,14 \cdot 10^{-3} \Rightarrow t = n3,14 \cdot 10^{-3} s \text{ με } n = 1, 2, 3 \dots$$

Παντελεήμων Παπαδάκης
21/02/2024