

Тема 2.6. Згин

План

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів
3. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору
4. Розрахунки на міцність за згину. Рациональні форми поперечних перерізів балок за згину
5. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину

1. Основні поняття та визначення. Класифікація видів згину. Внутрішні силові фактори за прямого згину

Згин – це один з простих видів навантаження (деформації) бруса, за якого у його поперечному перерізі діє *внутрішній згинальний момент* ($M_{zz} \neq 0$), внаслідок чого вісь бруса викривляється.

Брус, що працює на згин, називають *балкою*.

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених уздовж бруса) та моментів пар сил.

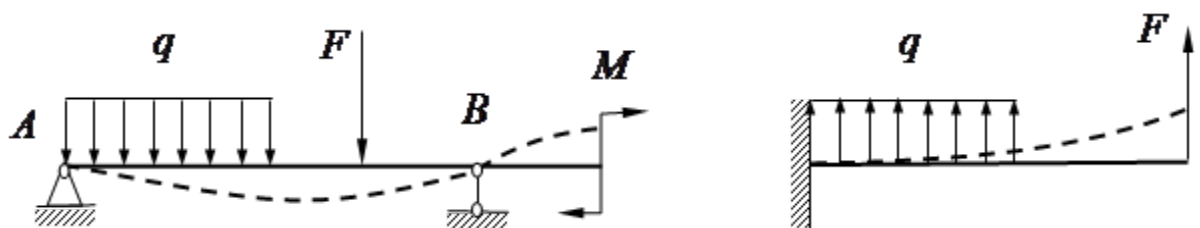


Рис. 1

Під час деформації згину у поперечних перерізах балки виникають такі внутрішні силові фактори, як поперечна сила Q_x і згинальний момент M_{zz} .

Розрізняють такі види згину:

- *чистий згин* ($M_{zz} = \text{const} \neq 0$, $Q_x = 0$);
- *поперечний згин* ($M_{zz} \neq 0$, $Q_x \neq 0$).

Якщо площина дії згинального моменту (*силова площина*) проходить через одну з *головних центральних осей* поперечного перерізу бруса, згин

називають **плоским прямим**. При цьому викривлена вісь бруса буде плоскою кривою, яка розташована в силовій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силовій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому разі маємо **складний просторовий згин**. Таку схему навантаження можна розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові на головних осях інерції перерізу.

Поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Зовнішні сили, які намагаються повернути відрізану частину балки, відносно перерізу, за ходом часової стрілки визивають додатну поперечну силу, і навпаки проти ходу часової стрілки від'ємну (рис. 2).

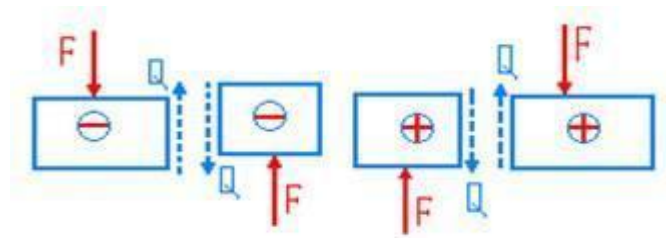


Рис. 2

Згинальний момент у перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Правило знаків. Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю донизу, то згинальний момент у перерізі вважають додатним, і навпаки (рис. 3).



Рис. 3

2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Під час побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів рекомендується дотримуватися такої **послідовності**:

- 1) Визначити реакції опор (для консолі їх можна не знаходити).

2) Розбити брус на ділянки, границями яких є перетини, в яких прикладені зосереджені сили і пари або розпочинається чи закінчується розподільне навантаження. Такі перетини називають характерними.

3) Користуючись методом перетинів, будуємо епюру поперечних сил. Якщо поперечна сила, змінюючись безперервно, проходить через нульове значення, то необхідно визначити абсцису перерізу, де Q стає нульовим.

4) Визначити в характерних перетинах значення згинальних моментів і за знайденими ординатами побудувати епюру M_x .

Взаємозв'язок між видами епюр і навантаженням

Для епюри поперечних сил

1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра – похила пряма, нахил прямої до осі балки залежить від інтенсивності навантаження.

2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра – пряма паралельна осі балки.

3) У перетинах, де прикладено зосереджену силу, значення поперечної сили змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює модулю цієї сили.

4) У перетинах, де прикладено пару сил, значення поперечної сили не змінюється.

5) У кінцевих перетинах балки поперечна сила чисельно дорівнює зосередженим силам, які прикладені у цьому перерізі. Якщо в кінцевому перерізі не прикладені зосереджені сили, поперечна сила в них рівна нулю.

Для епюри згинальних моментів

1) На ділянках, де прикладено рівномірно розподільне навантаження, епюра моментів є параболою. Опуклість параболи спрямовано в бік протилежний дії навантаження (на зустріч навантаженню).

2) На ділянках, вільних від рівномірно розподільного навантаження, епюра моментів похила пряма. Під зосередженими силами на епюрі утворюються згини, тобто для декількох ділянок епюра – ломана лінія.

3) У перерізі, де прикладено пару сил, значення згинального моменту змінюється стрибкоподібно, до того ж стрибок дорівнює моменту пари.

4) На кінці балки згинальний момент дорівнює нулю, якщо там не прикладено пару сил. Якщо в кінцевому перерізі прикладено зовнішню пару сил, то згинальний момент дорівнює моменту пари.

5) На ділянках, де $Q = 0$, балка відчуває чистий згин і епюра згинальних моментів – пряма паралельна осі балки.

6) Згинальний момент має екстремальне значення (*max* або *min*) в перетинах, де змінено знак поперечної сили.

3. Нормальні напруження в поперечних перерізах за згину. Осьові моменти опору

У поперечному перерізі балки за чистого згину виникають тільки **нормальні напруги** розтягу і стиску.

Для доказу розрахункових формул вводять такі **припущення**, які зроблені на основі досліджень:

1) плоский поперечний переріз балки за чистого згину залишається плоским до і після деформації (гіпотеза плоских перетинів);

2) поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто під дією нормальних напружень вони перебувають у лінійному напруженому стані.

Навантажуючи гумову модель двома протилежними парами сил, можна зробити такий висновок (рис. 4.): **за чистого згину поперечні перетини повертаються, поздовжні волокна на опуклому боці видовжуються, а на вгнутому – стискаються.**

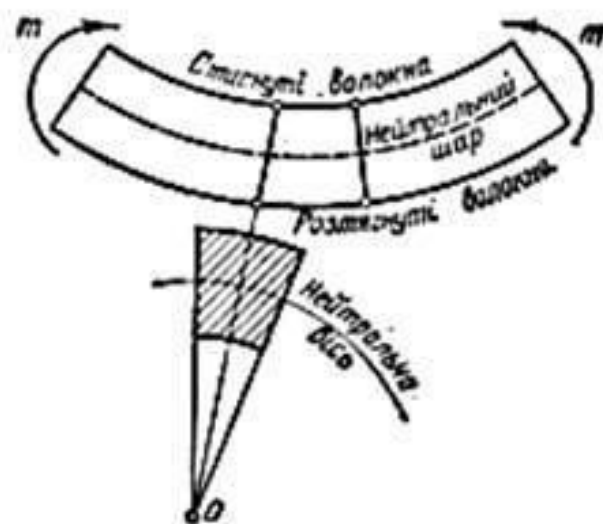


Рис. 4

На межі між ними лежить **нейтральний шар** волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини.

Приймаючи **гіпотезу про ненависання волокон**, можна стверджувати, що за **чистого згину** в поперечних перетинах бруса виникають тільки **нормальні напруги розтягу і стиску**, які нерівномірно розподілені за висотою перерізу і залишаються сталими за шириною.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень на поперечному перерізі. Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають **нейтральною віссю**. На нейтральній осі **напруги дорівнюють нулю**.

Як було встановлено раніше, в поперечних перетинах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Щоб визначити розподіл цих напруг на поперечному перерізі, треба розглянути деформації волокон балки.

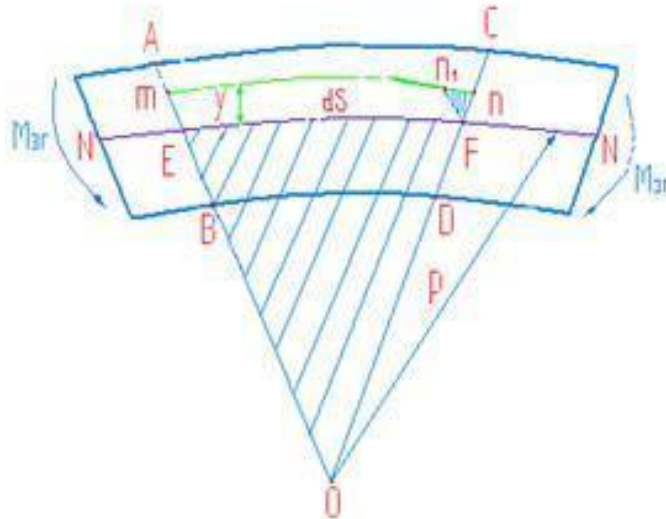


Рис. 5

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину. Двома поперечними перетинами AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини ds (рис. 5). Радіус кривизни **нейтрального шару** позначимо ρ . Розглянемо шар волокон, який знаходиться на відстані y від нейтрального шару NN . Це волокно як результат деформації згину видовжилось на величину nn_1 . Зважаючи на малість відстані ds , заштриховані трикутники вважатимемо прямолінійними; ці трикутники подібні.

$$(n_1F \parallel mE): \quad \triangle OEF \approx \triangle Fnn_1$$

З подібності трикутників маємо $\frac{nn_1}{ds} = \frac{y}{\rho}$. Через те, що ліва частина

цієї рівності є відносним видовженням, тобто $\frac{nn_1}{ds} = \varepsilon$, то $\frac{y}{\rho} = \varepsilon$.

Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E \cdot \varepsilon$, матимемо:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

З цієї формули видно, що нормальні напруги деформації згину розподілені за висотою перерізу **нерівномірно**: максимальні напруги виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі. За шириною перерізу нормальні напруги не змінюються. **Закон розподілу нормальних напруг** зображено на рис. 6.

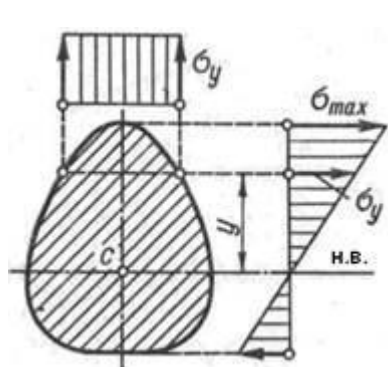


Рис. 6

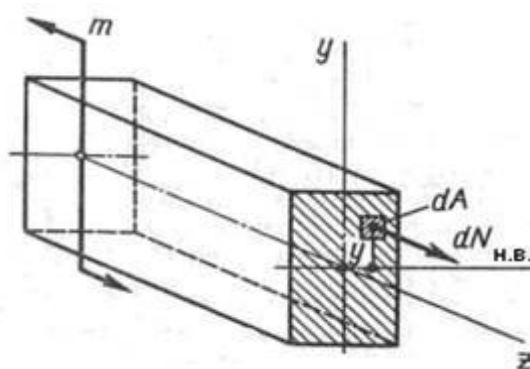


Рис. 7

Ця формула для обчислення нормальних напруг незручна, бо до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Щоб знайти формулу, яка зв'яже нормальні напруги і згинальний момент, застосуємо **метод перетинів** і розглянемо рівновагу частини балки, зображеної на рис. 7.

У площині поперечного перетину виділимо нескінченно малу площадку dA , у межах якої вважатимемо нормальні напруги σ сталими; тоді нормальна сила dN , що діє на площадку dA , дорівнюватиме $dN = \sigma \cdot dA$. Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \sum F_z = 0; \quad \int_A dN = 0; \quad \int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0$$

(ρ для цього перерізу величина стала, тому її винесено за знак інтеграла).

$$\text{Оскільки } E \text{ і } \rho \text{ не дорівнюють нулю, то } \int_A y \cdot dA = 0.$$

Цей інтеграл є **статичним моментом площі** перерізу відносно осі x , тобто нейтральної осі. Те, що статичний момент дорівнює нулю, означає, що під час згину нейтральна вісь проходить через **центр ваги** площі поперечного перетину.

$$2) \sum M_x = 0; \quad -m + \int_A y \cdot dN = 0;$$

оскільки за чистого згину згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{xz} = m$, то:

$$M_{xz} = \int_A y \cdot dN = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int_A y \cdot \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA,$$

$$\text{звідки } M_{xz} = \frac{E \cdot I}{\rho},$$

де: $I = \int_A y^2 \cdot dA$ – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі,
 EI – жорсткість перерізу за згину.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу:

$$M_{zz} = \text{const} \quad \text{і} \quad I = \text{const}, \quad \text{то} \quad \rho = \frac{E \cdot I}{M_{zz}} = \text{const}.$$

Отже, зігнута вісь такої балки є **дугою кола**.

Значення радіуса кривизни підставимо у формулу для обчислення нормальних напруг, тоді:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{E \cdot y}{E \cdot I / M_{zz}} = \frac{M_{zz} \cdot y}{I}$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна **найбільш віддалені** від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{zz} \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M_{zz}}{I / y_{\max}} = \frac{M_{zz}}{W},$$

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

де $y_{\max}$ – момент опору згину.

Момент опору згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перетину відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Значення моментів опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

1) Прямокутник $b \times h$:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} ; \quad W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6} .$$

2) Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 .$$

4. Розрахунки на міцність за згину. Раціональні форми поперечних перерізів балок за згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальна нормальна напруга в небезпечному перерізі не має перевищувати допустиму.

Вважаючи, що гіпотеза про ненатискання волокон дійсна не тільки для чистого, а й для поперечного згину, нормальні напруги в поперечному перерізі у випадку поперечного згину можна обчислювати за тією самою формулою, що й у випадку чистого згину. Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{zz \max}}{W} \leq [\sigma]$$

її читають так: нормальна напруга в небезпечному перерізі, не має перевищувати допустиму. **Допустиму нормальну напругу** для випадку згину беруть такою самою, як для розтягу і стиску.

Максимальний згинальний момент визначають з епюр згинальних моментів або розраховують.

Оскільки момент опору деформації згину W у розрахунковій формулі стоїть у знаменнику, то що більше W , то менші розрахункові напруги.

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад чавун), доцільно використовувати профілі, **несиметричні відносно нейтральної осі**, наприклад таврові або П-подібні. Оскільки у несиметричному профілю під час згину виникають неоднакові напруги розтягу і стиску, то переріз, наприклад, чавунної балки вигідно розміщувати таким чином, щоб менші напруги були у зоні розтягнутих, а більші – в зоні стиснених волокон.

Для розрахунків балок із **крихкого** матеріалу використовують дві умови міцності:

$$\begin{aligned} & \text{- для розтягнутої зони} \quad \sigma_{\text{роз.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{роз.}}}{I_x} \leq [\sigma_p]; \\ & \text{- для стисненої зони} \quad \sigma_{\text{ст.мах}} = \frac{|M|_{\text{мах}} \cdot y_{\text{ст.}}}{I_x} \leq [\sigma_{\text{ст}}]. \end{aligned}$$

Використання матеріалу буде найкращим, за умови що

$$\sigma_{\text{роз.мах}} = [\sigma_p], \quad \sigma_{\text{ст.мах}} = [\sigma_{\text{ст}}], \quad \text{для цього має виконуватися умова}$$

$$\frac{y_{\text{роз.}}}{y_{\text{ст.}}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{ст}}]}$$

тобто відстань нейтральної осі від найбільш віддалених точок у розтягнутій і стисненій зонах переріза мають бути **пропорційні** відповідній допустимій нарузі.

5. Поняття про дотичні напруження за прямого поперечного згину

У поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й **дотичні напруги**, які спричиняють деформацію **зсуву**. Відповідно до закону парності такі самі дотичні напруги виникатимуть і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах можна проілюструвати на такому прикладі.

Якщо брус прямокутного перерізу висотою $2h$ навантажити силою, оскільки показано на рис. 8а. Якщо з такого самого матеріалу виготовити два бруси висотою h кожний, то за навантаження силою F і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен сам по собі рис. 8б, звідси видно, що за згину цілого бруса висотою $2h$ між частинами бруса, розділеними поздовжніми волокнами, виникає взаємодія, як результат якої і виникають дотичні напруги. Наявність дотичних напруг у поздовжніх перерізах підтверджується появою в дерев'яних балках за поперечного згину поздовжніх тріщин.

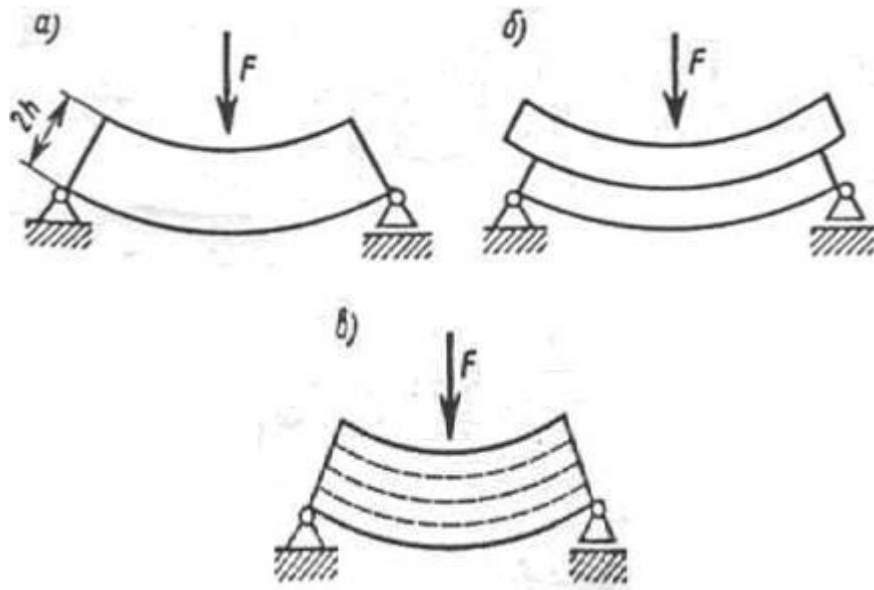


Рис. 8

Формулу для обчислення дотичних напруг поперечного згину балок прямокутного перерізу вивів у 1855 р. російський інженер-мостобудівник **Д.І. Журавський**. Така формула була потрібна в зв'язку з тим, що в минулому столітті для будівництва мостів широко використовували дерев'яні конструкції, а балки з деревини зазвичай мають прямокутний переріз і погано працюють на сколювання вздовж волокон:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b},$$

де: Q – поперечна сила в перерізі;

S – статичний момент відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглянутого шару волокон ;

I – момент інерції перерізу відносно нейтральної осі;

b – ширина розглядуваного шару волокон.

Цю рівність називають **формулою Журавського**, за нею визначають дотичні напруги в балках симетричного перерізу.

Формулу Журавського читають так: *дотичні напруги в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглядуваного шару волокон, поділеному на момент інерції I всього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглядуваного шару волокон.*

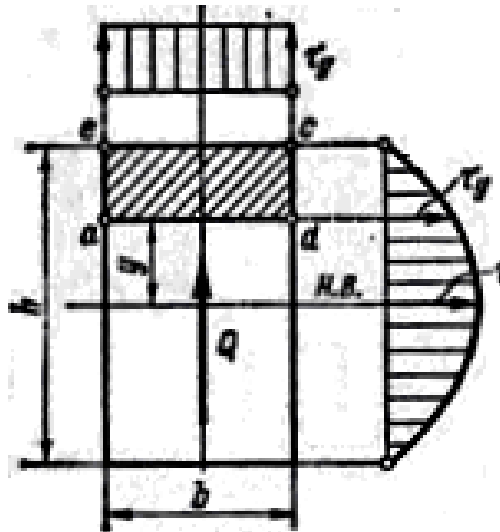


Рис. 9

Визначимо **закон розподілу дотичних напруг** для балки прямокутного перерізу рис. 9 для шару волокон *ad*.

$$S_{adice} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) ;$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot h^3} ;$$

коли $y = \pm \frac{h}{2}$, то $\tau = 0$;

коли $y = 0$, то $\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3\tau_c}{2}$.

Таким чином, у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруги дорівнюють **нулю**, а в волокнах нейтрального шару вони досягають **максимального значення**. Закони розподілу дотичних напруг за шириною і висотою прямокутного перерізу показано рис. 9.

Дотичні напруги в балках відповідають деформації зсуву, як результат плоскі поперечні перерізи за поперечного згину не залишаються плоскими, як за чистого згину, а **викривляються**.

Більшість балок розраховують тільки за нормальними напругами; три види балок треба перевірити за дотичними напругами, а саме:

- 1) дерев'яні балки, бо деревина погано працює на сколювання;
- 2) вузькі балки (наприклад, двотаврові), бо максимальні дотичні напруги обернено пропорційні ширині нейтрального шару;

3) короткі балки, бо за відносно невеликого згинального моменту й нормальних напругах у таких балках можуть виникати значні поперечні сили і дотичні напруги.