

Предмет і метод нарисної геометрії, проекції точки, прямої, площини.

План:

1. Предмет і метод нарисної геометрії.
2. Проекція точки.
3. Проекція прямої.
4. Проекція площини.

Нарисна геометрія, яка є одним із розділів математики, вивчає методи зображення тривимірного простору на площині, а також способи графічного розв'язання задач за рисунком.

Предметом нарисної геометрії є різноманітність геометричних образів та співвідношень між ними. Розрізняють три види геометричних образів: лінійні (точка, пряма, площина), нелінійні (крива лінія, крива поверхня) та складені (багатогранники, одновимірні та двовимірні обводи).

Основним елементом або образом тривимірного простору прийнято вважати точку. Довільну множину точок називають геометричною фігурою. Основними геометричними фігурами, крім точки, є ще пряма та площина.

Розрізняють два співвідношення між фігурами: позиційні та метричні. **Позиційна властивість** визначає розміщення геометричних фігур на площині та в просторі на основі взаємної належності одних фігур до інших. Належність може бути повною (пряма лежить у площині), частковою (пряма перетинається з площиною в точці) або її може не бути взагалі (дві мимобіжні прямі).

Метричні властивості пов'язуються з визначенням метричних характеристик (розмірів) відстаней, кутів та площ. Залежно від характеру властивостей розрізняють позиційні та метричні задачі.

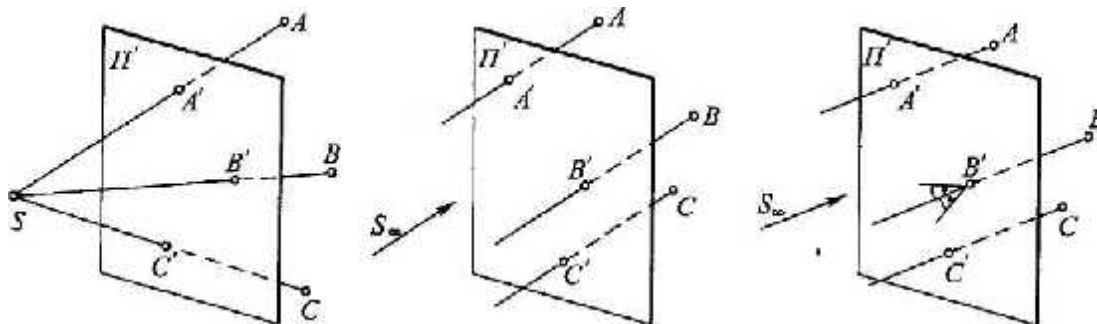


Рис. 1.1

Основою нарисної геометрії є **метод проєкціювання**, який дає змогу отримувати зображення просторових фігур на площині. Метод проєкціювання має три складові; це об'єкт, площина проєкцій та центр проєкціювання.

На рис. 1.1. показані точки A, B, C , площина проєкцій Π та центр проєкціювання S . Якщо точки з'єднати прямими з центром S , то в перетині з площиною Π одержимо проєкції цих точок на площині Π . Пряма, що проходить через центр проєкціювання і паралельна площині проєкцій, перетинається з нею також у невласній точці. Центр S може бути власним, в цьому разі проєкціювання має назву центрального, або невласним (нескінченно віддаленим), при якому проєкціювання є паралельним. Паралельні прямі перетинаються у нескінченно віддаленій (невласній) точці. Паралельне, в свою чергу, має два різновиди: косокутне та прямокутне. У першому випадку кут між напрямом проєкціювання та площиною проєкцій є непрямым (рис. 1.1 б), а в другому — прямим (рис. 1.1 в).

Як видно з рис. 1.1, положення точки в тривимірному просторі не можна визначити за допомогою однієї проєкції, бо ця проєкція є проєкцією будь-якої точки, що належить на проєкціюючому промені. Для визначення положення точки в просторі треба мати щонайменше її дві проєкції. За методом Монжа ці дві площини розташовуються перпендикулярно одна одній, одна з них Π_1 розташовується горизонтально і має назву **горизонтальної площини проєкцій**, а друга Π_2 - фронтально і має назву **фронтальної площини проєкцій**. Вони перетинаються по прямій — осі проєкцій x_{12} . Геометричні образи проєкціюються на ці площини проєкцій променями, перпендикулярними до них. На рис. 1.2 показано проєкціювання точки A на площини Π_1 та Π_2 прямими з центрів S_∞ та T_∞ , розташованих у напрямках, перпендикулярних до Π_1 та Π_2 . Для того, щоб одержати зображення точки на одній площині, можна вдатися до двох прийомів:

- 1) сумістити площину Π_1 , з площиною Π_2 обертанням навколо осі проєкцій x_{12} ;

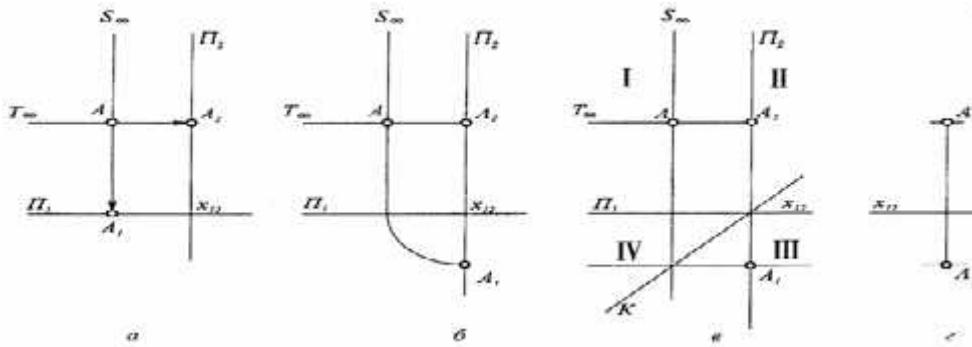


Рис. 1.2

2) спроекціювати з центру S_{∞} точку A на бісекторну площину K , яка ділить двогранний кут між площинами Π_1 , та Π_2 навпіл, і потім перепроекціювати її у напрямі, перпендикулярному до Π_2 , на цю площину проєкцій.

Залежно від положення площин проєкцій та центрів проєкціювання можна одержати різні проєкційно-зображувальні системи. Найбільш поширеною системою в техніці є **система прямокутних проєкцій, або метод Монжа**. За цим методом площини Π_1 та Π_2 взаємно перпендикулярні, а центри проєкціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному до площин проєкцій. Сукупність кількох зв'язаних між собою проєкцій фігури (мінімум двох) називають системою прямокутних (ортогональних) проєкцій, або комплексним рисунком Монжа. Площини проєкцій Π_1 та Π_2 при своєму продовженні ділять тривимірний простір на **чотири чверті, або квадранти**. На рис. 1.2в римськими цифрами показано послідовність чвертей.

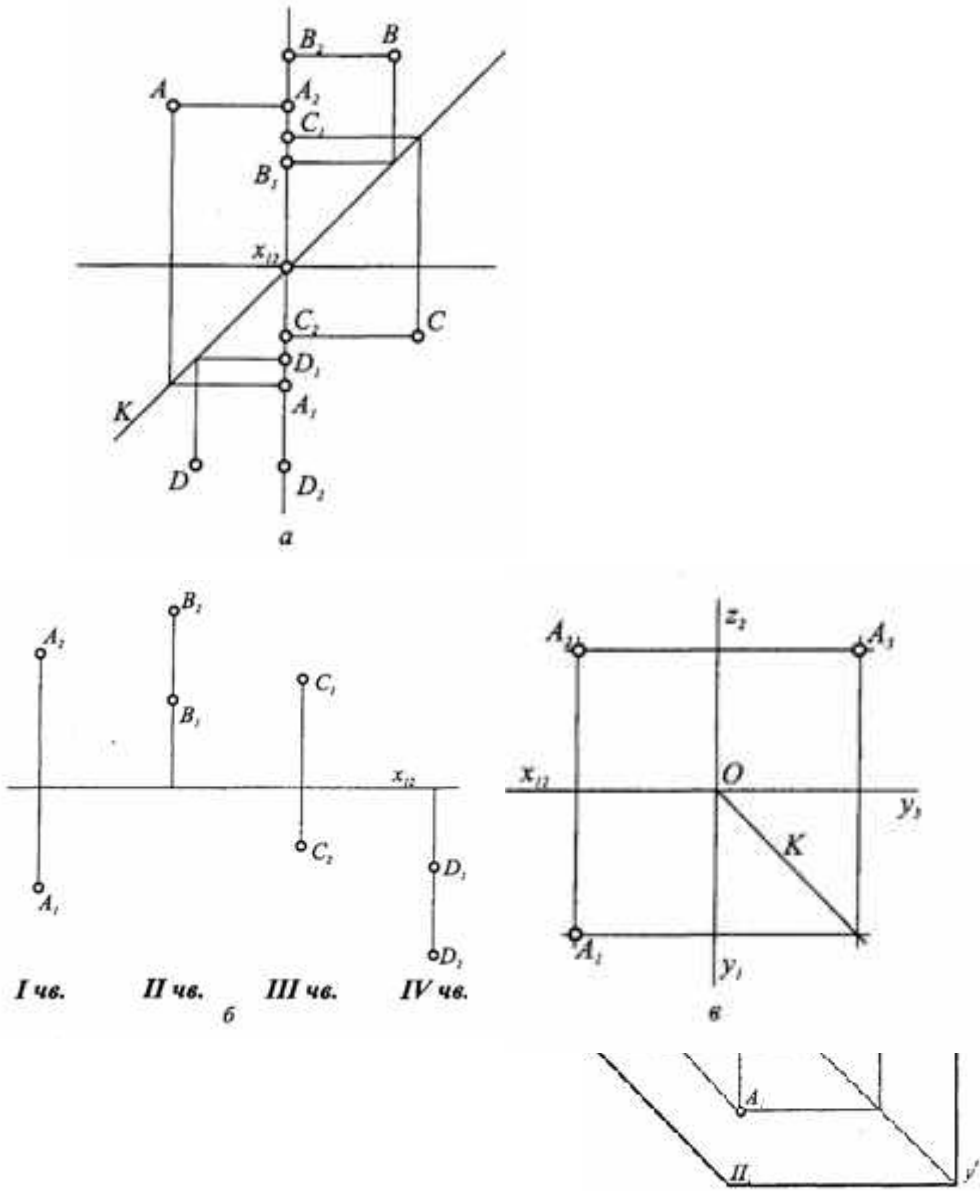
Запитання для самоперевірки

1. Які види проєкціювання використовуються в нарисній геометрії? Які складові цього процесу?
2. Що таке чверті простору, або квадранти?
3. Скільки проєкцій визначають положення геометричної фігури в просторі?
4. Що таке позиційні властивості геометричних фігур?
5. Наведіть приклади метричних властивостей геометричних фігур.

Проекції точки

На рис. 1.3 показано проєкції точки A , що розташована у першій чверті, її фронтальна проєкція розташована вище осі x_{12} , а горизонтальна — нижче осі (рис. 1.3а,б). Точка B розташована у другій чверті, має обидві проєкції вище осі x_{12} , точка C розташована, у 3-й чверті має фронтальну проєкцію нижче осі, а горизонтальну — вище, нарешті, точка D розташована у 4-й чверті, має обидві проєкції нижче осі x_{12} . Якщо точка належить площині проєкцій Π_1 , або Π_2 , то її друга проєкція лежатиме на осі x_{12} , а якщо вона належить бісекторній площині K , то обидві її проєкції збігаються, те ж стосується й точок, які належать осі x_{12} , бо ця вісь також належить бісекторній площині K . На рис. 1.4 показана третя (профільна) площина проєкцій Π_3 і проєкція точки A на неї.

На рис. 1.3в показано побудову третьої (профільної) проєкції за двома заданим.



на пряма до зустрічі з бісекторною
гальної прямої, проведеної через
с.

Рис. 1.4

Проекції прямої

Як відомо, пряма визначається двома точками. І пряма, довільно розташована по відношенню до площин проекцій, називається **прямою загального положення**, її проекції довільно розташовуються на комплексному рисунку. Точки перетину прямої з площинами проекцій називаються її слідами: **перетин з Π_1 має назву горизонтального сліду, а перетин з Π_2 - фронтального**. На рис. 1.5 показано побудову слідів прямої загального положення.

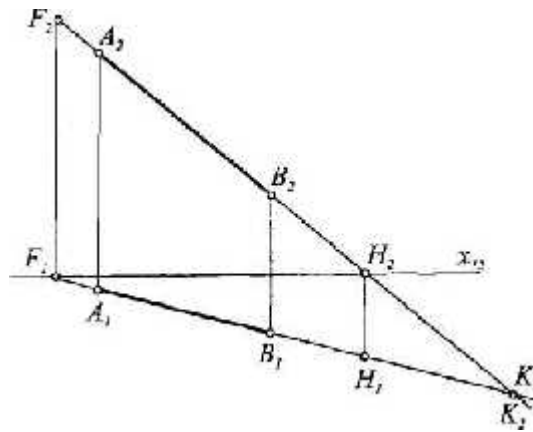


Рис. 1.5

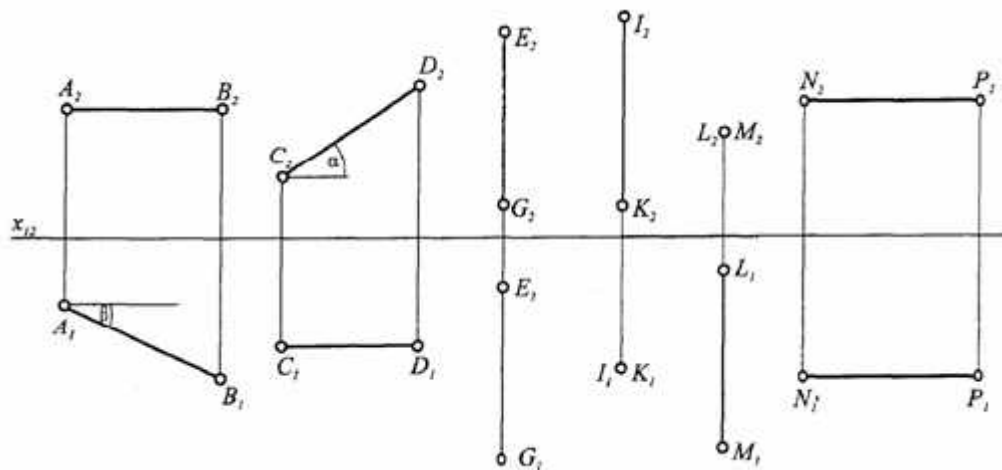
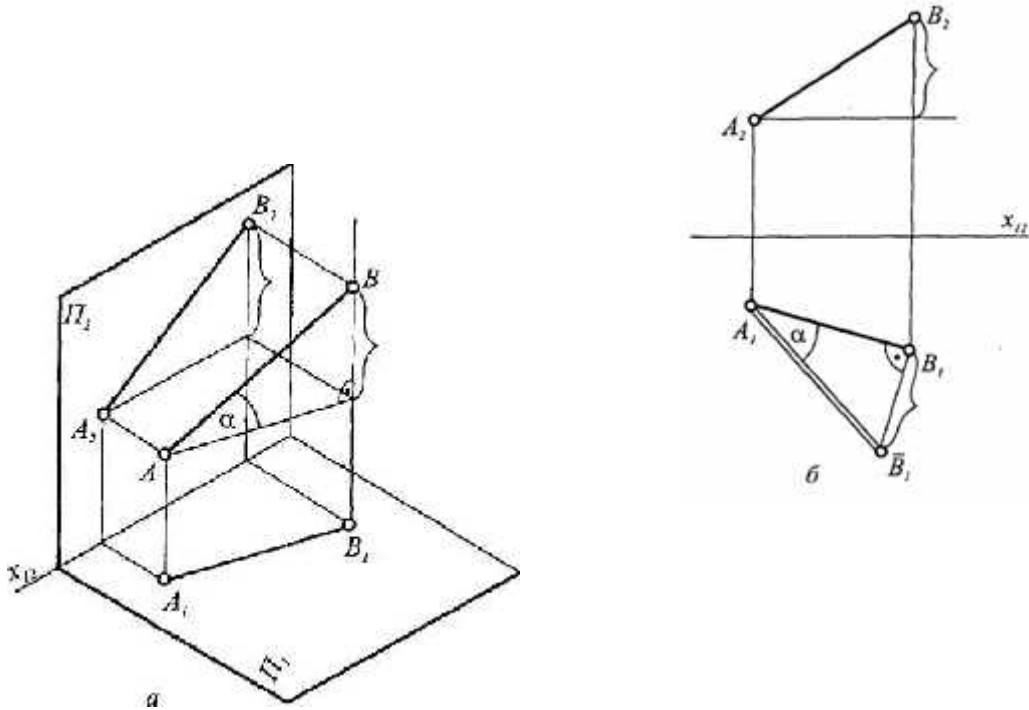


Рис. 1.6

Щоб отримати горизонтальний слід, фронтальна проекція продовжується до осі, з отриманої точки проводиться вертикальна лінія відповідності до перетину з продовженою горизонтальною проекцією. Для одержання фронтального сліду горизонтальна проекція продовжується до осі і т. д. Якщо продовжити до взаємного перетину проекції прямої, отримуємо так званий слід відповідності $K_1 \equiv K_2$ тобто перетин прямої з бісекторною площиною K . Як уже зазначалося, проекції геометричних образів, що лежать у площині K , збігаються.

Крім загального положення, пряма в просторі може займати окремі положення (рис. 1.6). Пряма AB , паралельна площині Π_1 , називається **горизонтальною**, на Π_1 зображується в натуральну величину відрізок прямої та кут α її нахилу до площини Π_2 . Пряма CD , паралельна площині Π_2 , називається **фронтальною**, її відрізок і кут нахилу β до площини Π_1 зображаються без спотворення на площині Π_2 . Пряма EG , паралельна профільній площині проєкцій Π_3 має назву **профільної**, там же визначаються її натуральна величина, горизонтальний та фронтальний сліди та кути нахилу до Π_1 та Π_2 . Прямі, паралельні площинам проєкцій називають ще **прямими рівня**. Крім прямих, паралельних Π_1 , Π_2 , та Π_3 існують прямі, перпендикулярні до них. Пряма IK , перпендикулярна до Π_1 , називається **горизонтально-проєкціуючою** або вертикальною, пряма LM , перпендикулярна до Π_2 , — **фронтально-проєкціуючою** або глибинною, пряма NP , перпендикулярна до Π_3 , — **профільно-проєкціуючою** або поздовжньою.

На рис. 1.7 показаний відрізок АВ прямої в системі площин проєкцій Π_1 та Π_2 . Як видно з рис. 1.7а, **натуральна величина відрізка прямої** є гіпотенуза прямокутного трикутника, одним катетом якого є



одна з проєкцій, а другим катетом — різниця відстаней кінців відрізка на другій проєкції до відповідної площини проєкцій (рис. 1.7б).

Рис. 1.7

Цей спосіб визначення натуральної величини відрізка прямої називається **способом прямокутного трикутника**. З цього ж прямокутного трикутника визнається і кут нахилу прямої до відповідної площини проєкцій.

До цього часу комплексний рисунок Монжа виконувався при наявності осі x_{12} ; яка розділяла поля проєкцій Π_1 та Π_2 . Але наявність цієї осі не завжди необхідна, від неї не залежить вигляд проєкцій. В технічному кресленні найбільш поширений так званий **безосьовий рисунок**, коли ця вісь відсутня. В подальшому будуть використовуватися рисунки як з віссю, так і без неї.

Проекції площини

Площина визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій. Крім цього, вона може визначатися прямою і точкою, двома прямими, що перетинаються, і трикутним відсіком (рис. 1.8). Часто площину задають слідами, тобто лініями перетину її з площинами проєкцій. Перетин площини з Π_1 , називається горизонтальним слідом, а з Π_2 — фронтальним (рис. 1.9). Площина, довільно розташована до площин проєкцій, називається **площиною загального положення**. На рис. 1.10 площину задано трикутним відсіком ABC. Щоб задати в цій площині будь-яку пряму, одну проєкцію задають довільно, продовжують її до перетину зі сторонами відсіку, точки перетину визначають на другій проєкції, через ці точки пройде друга проєкція прямої l .

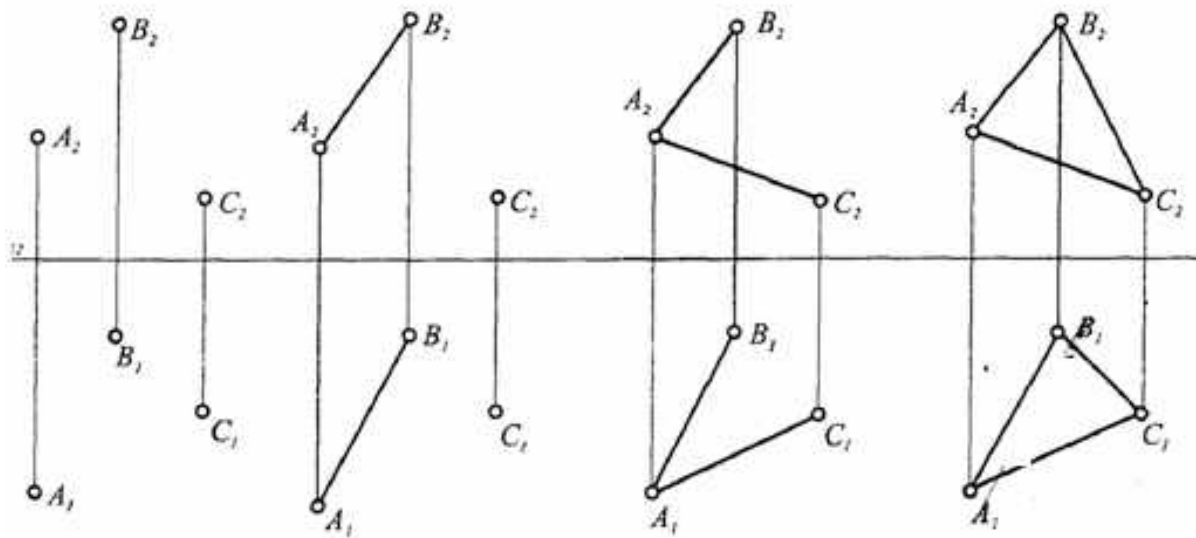


Рис. 1.8

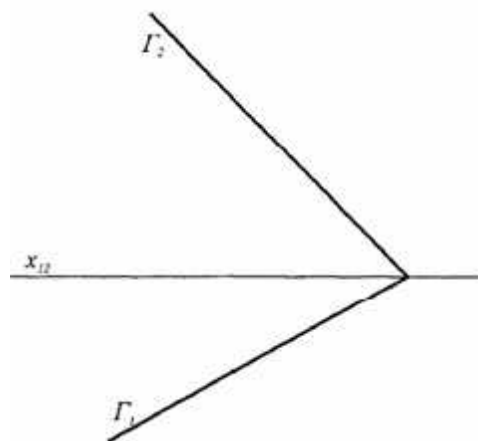


Рис. 1.9

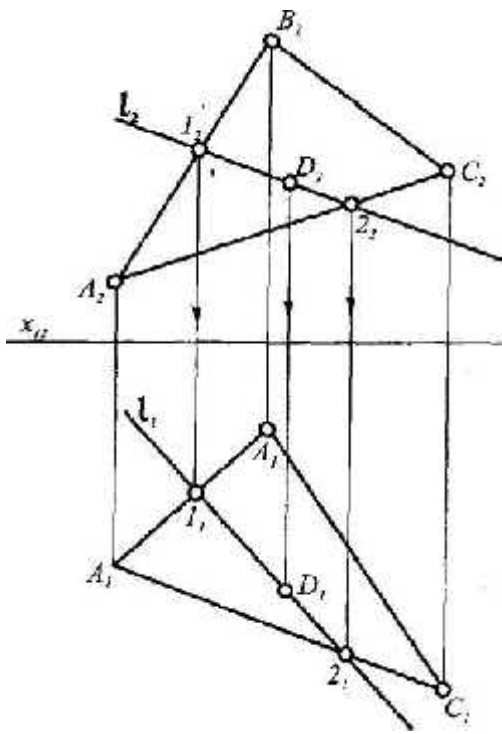


Рис. 1.10

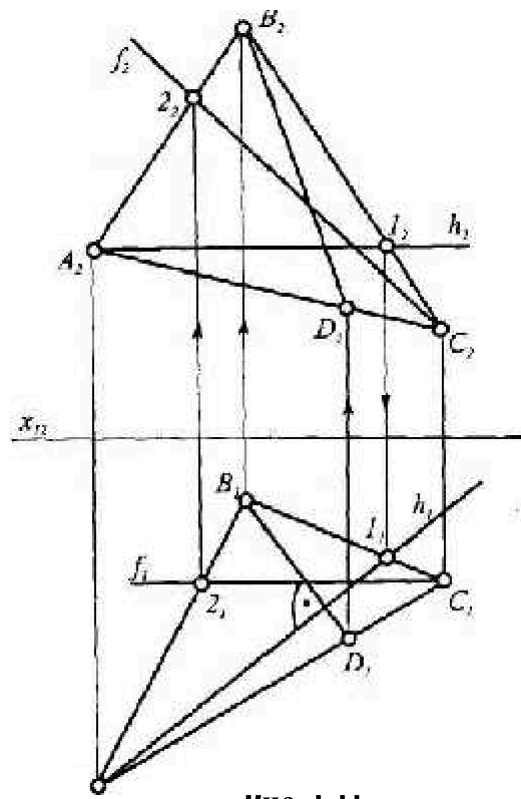


Рис. 1.11

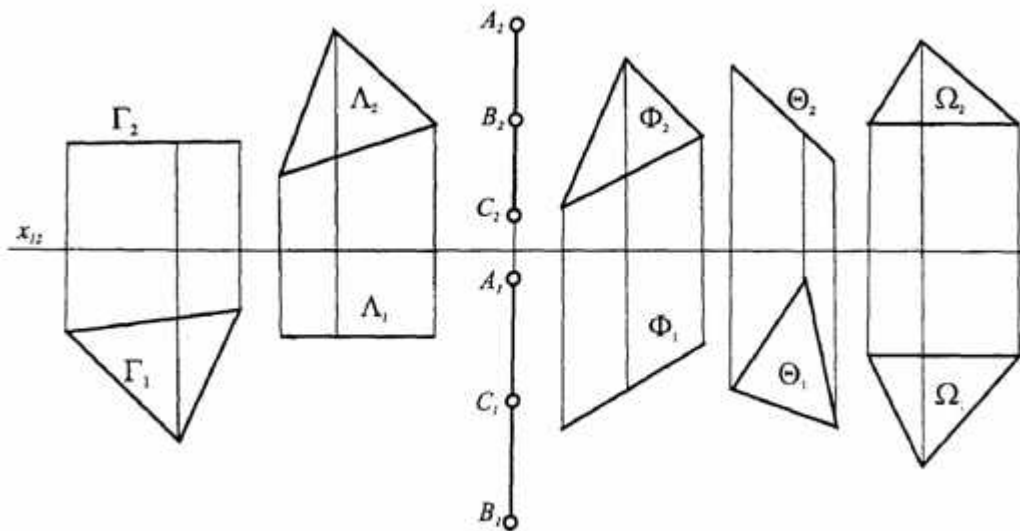


Рис. 1.12

Щоб задати в площині точку, необхідно через неї провести будь-яку пряму, знайти другу проекцію прямої і за вертикальною відповідністю знайти на цій проекції другу проекцію точки. На рис. 1.10 точка D в площині знайдена за допомогою прямої l .

При розв'язанні багатьох задач нарисної геометрії широко використовують *горизонтальні лінії площини* — *горизонталь*, *фронталь* і *лінію найбільшого ухилу*. На рис. 1.11 задано трикутний відсік ABC , в ньому проведено всі три головні лінії. Горизонталь h — це пряма, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 , фронталь f — це пряма, що належить площині і паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 . Горизонталь та фронталь називають ще **лініями рівня**. **Лінія найбільшого ухилу** BD по відношенню до площини Π_1 перпендикулярна до горизонталі.

Так само, як і пряма, площина може займати окремі положення стосовно площин проєкцій, а саме — бути паралельною площинам Π_1 , Π_2 , Π_3 та перпендикулярною до них. На рис. 1.12 показано шість таких положень площин, заданих трикутним відсіком. Площина Γ , паралельна Π_1 , називається *горизонтальною*, площина L , паралельна Π_2 , — *фронтальною*, а площина ABC , паралельна Π_3 — *профільною*. При цьому відсіки зображуються на паралельних їм площинах в натуральну величину. Відсіки площин Φ , Ψ та I , перпендикулярні до Π_1 , Π_2 , Π_3 , зображуються на цих площинах проєкцій виродженими проєкціями, тобто прямими.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке найпростіший геометричний образ?
2. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
3. Як задати точку в площині?
4. Як зображуються точки, що належать бісекторній площині K ?