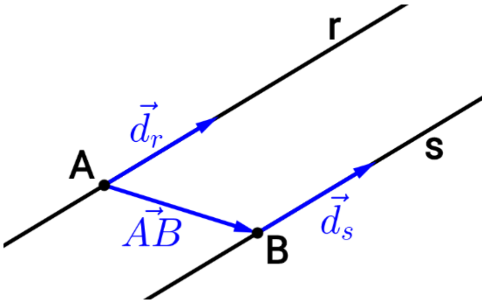
Posiciones relativas de dos rectas

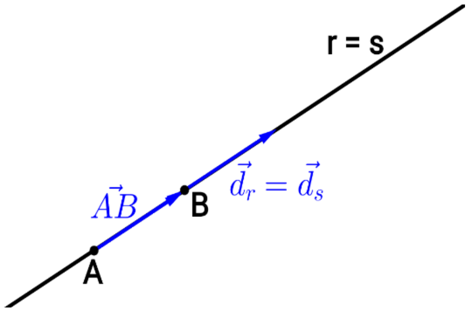
Sean dos rectas $r(A;\vec{d_r})$ y $s(B;\vec{d_s})$

PARALELAS



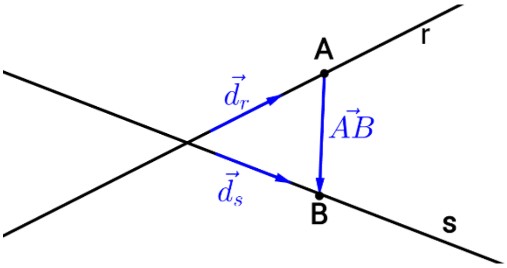
Este caso se da cuando $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \nparallel \vec{AB}$

COINCIDENTES



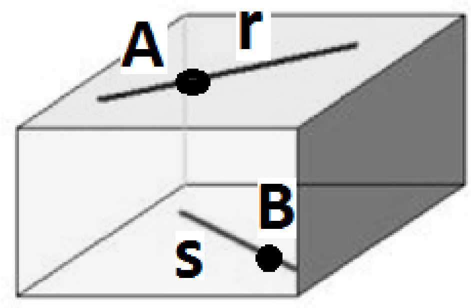
Este caso se da cuando $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \parallel \vec{AB}$

SECANTES



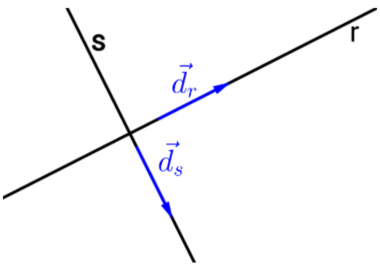
Este caso se da cuando $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ *y* $\det\left(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{AB}\right) = 0$

SE CRUZAN



Este caso se da cuando $\det\left(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{AB}\right) \neq 0$

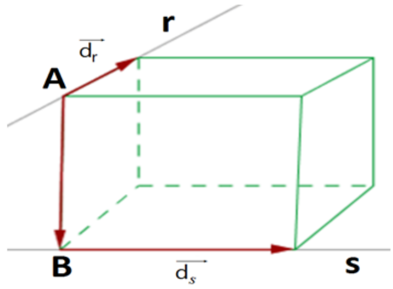
SECANTES PERPENDICULARES



Este caso se da cuando $\det\left(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{AB}\right) = 0$

$\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 0$

SE CRUZAN PERPENDICULARMENTE



Este caso se da cuando $\det\left(\vec{d_r}, \vec{d_s}, \vec{AB}\right) \neq 0$ *y* $\vec{d_r} \cdot \vec{d_s} = 0$

En el caso que las rectas sean secantes, el punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas

Si r y s vienen dadas por ecuaciones implícitas, $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$

Sea el sistema formado por las cuatro ecuaciones, A la matriz de coeficientes y A* la ampliada

$$\begin{cases} \text{Si rango}(A)=2 \text{ y rango}(A^*)=3 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son paralelas} \\ \text{Si rango}(A)=2 \text{ y rango}(A^*)=2 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son coincidentes} \\ \text{Si rango}(A)=3 \text{ y rango}(A^*)=3 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes} \\ \text{Si rango}(A)=3 \text{ y rango}(A^*)=4 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan} \end{cases}$$

También podemos usar el siguiente criterio:
Dadas dos rectas **r** y **s**, de las que conocemos el vector director y un punto de cada una:
Vectores: (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) Puntos (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)

		Rango de M	Rango de M*	Posición relativa
$M=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$	caso 1	2	3	rectas que se cruzan
$M=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ X_1-X_0 & Y_1-Y_0 & Z_1-Z_0 \end{pmatrix}$	caso 2	2	2	rectas secantes
	caso 3	1	2	rectas paralelas
	caso 4	1	1	rectas coincidentes

$$r:\begin{cases} P(a,b,c) \\ \vec{d}(d_1,d_2,d_3) \end{cases} \quad s:\begin{cases} P'(a',b',c') \\ \vec{d}'(d_1',d_2',d_3') \end{cases}$$

Consideremos las matrices: $M=\begin{pmatrix} d_1 & d_1' \\ d_2 & d_2' \\ d_3 & d_3' \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} d_1 & d_1' & a'-a \\ d_2 & d_2' & b'-b \\ d_3 & d_3' & c'-c \end{pmatrix}$

Vamos a analizar ahora en función del rango de las matrices M , M' la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} P(a,b,c) \\ \vec{d}(d_1,d_2,d_3) \end{cases}$ y $s:\begin{cases} P'(a',b',c') \\ \vec{d}'(d_1',d_2',d_3') \end{cases}$

A) Si rango (M)= 1= rango (M’) las rectas son coincidentes: Tienen un punto en común y la misma dirección.
B) Si rango (M)= 1 y rango (M’)= 2 las rectas son paralelas: Ningún punto en común y la misma dirección
C) Si rango (M)= 2= rango (M’) las rectas son secantes: Un punto en común y distinta dirección.
D) Si rango (M)= 2 y rango (M’)= 3 las rectas se cruzan: Ningún punto en común y distinta dirección

Dadas dos rectas r y s por sus ecuaciones generales:

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Entonces se estudian los rangos de M y M':

	Rango de M	Rango de M*	Posición de DOS RECTAS
Caso 1	3	4	rectas cruzadas
Caso 2	3	3	rectas secantes
Caso 3	2	3	rectas paralelas
Caso 4	2	2	rectas coincidentes

Actividades

¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta?

a) Si dos rectas son coincidentes o paralelas, forman un ángulo de 0º.

b) Si dos rectas son secantes, determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. El menor de ellos se define como el ángulo entre las rectas.

c) Si dos rectas se cruzan, el ángulo entre ellas es el mayor de los ángulos que forma la paralela a una de ellas que corta la otra.

****

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Si los vectores directores de dos rectas son linealmente independientes, diremos que éstas son coincidentes o paralelas.

b) Si los vectores directores de dos rectas son linealmente dependientes, diremos que éstas son coincidentes o paralelas.

c) Si los vectores directores de dos rectas son linealmente dependientes, diremos que éstas se cortan o se cruzan.

****

Las rectas secantes y las rectas paralelas en el espacio tienen una propiedad en común, ¿cuál es?

****

Las rectas que se cruzan y las rectas paralelas en el espacio tienen una propiedad en común, ¿cuál es?

****

Estudia la posición relativa de las rectas r y s. En el caso de que sean secantes, calcula el punto de corte.

a) $r \equiv x - 1 = \dfrac{y}{2} = z - 2 \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$ Sol.: paralelas

b) $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{2}$ Sol.: son secantes en el punto $(-1,\ 11,\ 4)$

$r:\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

$$r:\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-2z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

$$r:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+3t \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} x=2+u \\ y=-2u \\ z=7+6u \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3} \ ; \quad \begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{cases}$$ Sol.: Las rectas se cruzan

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2} \qquad s\equiv\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

Solución. Las rectas se cortan en el punto P(1,2,1).

****

Sea la recta r: $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\}$ y la recta s que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, -1)

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.

b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos AC y CB sean perpendiculares.

****

Demuestra que las rectas r≡ $x-1=y=\frac{z}{3}$, s≡ $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{-z}{3}$, se cruzan.

****

Dadas las rectas: $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$, $s\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. Estudia su posición y, si fuese posible, la ecuación del plano que las contiene. Solución. Las rectas se cruzan.

****

Dadas las rectas: $r\equiv\begin{cases} 4x+5y+7z=7 \\ 3x+2y+4z=3 \end{cases}$ $s\equiv\begin{cases} x-3y-2z+3=0 \\ 3x-4y-z+4=0 \end{cases}$ Averigua si están contenidas en un mismo plano π y en caso afirmativo halla la ecuación de este plano. Solución. Se cruzan.

****

Estudia analíticamente e interpreta geométricamente, según los valores del parámetro α, la posición relativa de las siguientes rectas: r ≡ {x - 2z = 1, y – z = 2} s ≡ {x + y + z = 1, x - 2y + 2z = α}.

****

Dadas las rectas r ≡ {3x - 2z = -3, 3x – kz = 3 - 4k}, s ≡ {3y - 2z = -2, kx - 2y = k - 4} determina los valores de k para los cuales las rectas r y s están en un mismo plano y busca la ecuación de este plano.

****

Estudiar según los valores del parámetro a, la posición relativa de las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = (a+2)\cdot\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$$

$$s \equiv a - x = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$$

****

Halla los valores de a para que sean ortogonales las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$

Sol.: $a = \pm 3$

****

Determinar los valores de los parámetros a y b para las rectas se corten ortogonalmente:

r: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$

****

Sean las rectas $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{3m-1} = \frac{z}{1}$; $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = mt \end{cases}$ a) Calcula m para que sean paralelas b) Halla m para que sean perpendiculares c) Averigua si para m = 2 las rectas se cortan o se cruzan

****

Determina a para que $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2ax + y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$ sean perpendiculares. Sol.: $a = 2, \quad a = \frac{1}{2}$

****

Dadas las rectas r y s: $r \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2z = a \end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que ambas rectas estén en el mismo plano

b) Hallar la ecuación de dicho plano

****

Sean r y s las rectas dadas por: $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de m para que ambas rectas se corten. Sol.: $m = 1$

b) Para m = 1, calcula la ecuación del plano que contiene a r y s. Sol.: $10x + 7y + 6z - 23 = 0$

****

Estudia analíticamente e interpreta geométricamente, según los valores del parámetro α, la posición relativa de las siguientes rectas: r≡{x-2z=1, y-z=2} s≡{x+y+z=1, x-2y+2z=α}. Solución. Si α=-4 se cortan. Si α≠-4 se cruzan.

****

Dadas las rectas r≡{3x-2z=-3, 3x-kz=3-4k}, s≡{3y-2z=-2, kx-2y=k-4} determina los valores de k para los cuales las rectas r y s están en un mismo plano y busca la ecuación de este plano. Solución. k=-2. 3x+2z-11=0.

****

Discutir, según la posición relativa de las rectas r y s de R^3 y el punto P ∈ R^3, la existencia de una recta que pase por P y corte a r y s.

****

Determinar la posición relativa de las rectas según los valores del parámetro m

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ mx-2y-2=0 \end{cases}$$

SOLUCION

$\vec{r}$ =(1, 2, -1) ;   A(1, 0, 2) ∈ r

$$\vec{s} = (1,0,1) \wedge (m,-2,0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{vmatrix} \right) = (2,\ m,\ -2)$$

;   B(0, -1, 3) ∈ s

$\overrightarrow{BA} = (1,\ 1,\ -1)$

Estudiemos el rango($\vec{r}$, $\vec{s}$, $\overrightarrow{BA}$) y rango($\vec{r}$, $\vec{s}$) :

rango($\vec{r}$, $\vec{s}$, $\overrightarrow{BA}$)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ∀ m, rango($\vec{r}$, $\vec{s}$)=

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad m \neq 4 \\ 1 & \text{si} \quad m = 4 \end{cases}$$

∀ m rango($\vec{r}$, $\vec{s}$, $\overrightarrow{BA}$)=2 ⇒ se cortan o son paralelas estrictas

Si m=4, r y s son paralelas estrictas

Si m≠4, r y s son incidentes (un punto común)

****

Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{3m-1} = \frac{z}{1} \ ; s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = mt \end{cases}$$

a) Calcula m para que sean paralelas   b) Halla m para que sean perpendiculares   c) Averigua si para m = 2 las rectas se cortan o se cruzan

****

Sean las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$

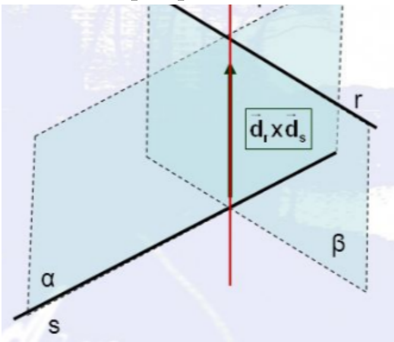
a) Comprueba que las rectas se cruzan.

$$\underline{\text{Solución}}: A(0,3,2)\in r\;;\; \vec{d_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,2)\quad;\qquad B(-3,-1,0)\in s\;;\; \vec{d_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-2,0,-1)\parallel(2,0,1)$$

Como $\vec{d_r}\nparallel\vec{d_s}$, r y s no son paralelas ni coincidentes (serán secantes o se cruzarán) ; $\vec{AB}=(-3,-4,-2)\parallel(3,4,2)$

$$\det\left(\vec{d_r},\vec{d_s},\vec{AB}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=3+16-4-4=11\neq 0\;;\ \text{Por tanto, } \boxed{\text{r y s se cruzan}}$$

b) Calcula la ecuación de la recta t que las corta perpendicularmente.



$$\underline{\text{Solución}}: \vec{d_t}=\vec{d_r}\ x\ \vec{d_s}=(1,3,-2)\ ;\ t=\alpha\cap\beta;\ \begin{cases} \text{El plano } \alpha \text{ contiene a las rectas s y t} \Rightarrow \alpha\left[B(-3,-1,0);\ \vec{n_\alpha}=\vec{d_s}\ x\ \vec{d_t}=(-3,5,6)\right] \\ \text{El plano } \beta \text{ contiene a las rectas r y t} \Rightarrow \beta\left[A(0,3,2);\ \vec{n_\beta}=\vec{d_r}\ x\ \vec{d_t}=(-8,4,2)\parallel(-4,2,1)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha:-3(x+3)+5(y+1)+6(z-0)=0\to\beta:-3x+5y+6z-4=0 \\ \beta:-4(x-0)+2(y-3)+1(z-2)=0\to\alpha:-4x+2y+z-8=0 \end{cases}\ \to\ \boxed{t:\begin{cases} -3x+5y+6z-4=0 \\ -4x+2y+z-8=0 \end{cases}}$$

$\underline{\text{Solución}}$ (por el método del punto genérico): Tomamos puntos genéricos de r y s: $\begin{cases} P_r(\lambda,\ 3+\lambda,\ 2+2\lambda) \\ Q_s(-3+2\mu,\ -1,\ \mu) \end{cases}$

$$\vec{P_rQ_s}=(-3+2\mu-\lambda,\ -4-\lambda,\ \mu-2-2\lambda)\parallel\vec{d_r}\ x\ \vec{d_s}=(1,3,-2)$$

$$-3+2\mu-\lambda=\frac{-4-\lambda}{3}=\frac{\mu-2-2\lambda}{-2}\to\lambda=\frac{-23}{14}\ ,\ \mu=\frac{2}{7}\to P\left(\frac{-23}{14},\frac{19}{14},\frac{-18}{14}\right),\ Q\left(\frac{-17}{7},-1,\frac{2}{7}\right);\quad t(P,Q)=t\left(Q;\ \vec{d_t}=(1,3,-2)\right)$$

$$\boxed{t:(x,y,z)=\left(\frac{-17}{7},-1,\frac{2}{7}\right)+(1,3,-2)\lambda}$$

****

Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x-2z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

a) Investiga si son paralelas.

b) En caso afirmativo, halla la ecuación del plano que las contiene

Solución:

Hacemos $z=\lambda$ y las expresamos en paramétricas.
a) Las rectas son paralelas porque los vectores directores son proporcionales.
b) Escogemos un punto de cada recta y formamos el vector que une ambos puntos.
Con dicho vector, un vector director de una de ellas y uno de los dos puntos que conocemos, escribimos la ecuación del plano: $3x-4y-2z+1=0$

****

Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-k}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$.

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

****

Dadas las rectas $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-a}{-1}$ y $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$, calcula el valor de a para que las rectas se corten y, para dicho valor, calcula el plano que las contiene

****

Estudia en función de a la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ -x+4y+az=5 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x-ay+3z=4 \\ -x+y+az=2 \end{cases}$ Halla la intersección de las rectas anteriores para a = 2.

****

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y-z=2 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ x+2z=a \end{cases}$

Hallar el valor de a para que estén en el mismo plano.
Hallar la ecuación de dicho plano.

****

Las rectas $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.
Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
Halla un punto de r y otro punto de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro, sea perpendicular a ambas rectas.
Solución:

$$r: \begin{cases} x=7-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \qquad : \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\mu \end{cases}$$

Tomamos un punto genérico de r y un punto genérico de s:

$P(7-2\lambda, \lambda, 3-\lambda)$; $Q(2,-5,\mu)$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser perpendicular a cada uno de los vectores directores de las rectas dadas. (Producto escalar nulo)

Resolviendo el sistema se obtiene $\lambda=1, \quad \mu=2$ valores que llevados a P y Q nos dan los puntos $P(5,1,2)$ y $Q(2,-5,2)$

****

2014-8 Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{cases}$
Estudia la posición relativa de r y s.
****
2013-5 Sea r la recta que pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector dirección (a, 2a, 1) y sea s la recta dada por $\begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=0 \end{cases}$. Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
****
2009-6 Considera la recta "r" definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta "s" que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, −1).
(a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.
(b) Determina un punto C de la recta "r" tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares.
****
2009-11 Sea la recta r definida por x – y = –2x – z = –3 y la recta s definida por x = 12y – z = –2
Estudia la posición relativa de r y s
****
2008-11 Se considera la recta r definida por mx = y = z + 2, (m ≠ 0), y la recta s definida por
$\frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$
(a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.
(b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.
****
2005-5 Se sabe que las rectas $r: \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$ son paralelas. Calcula a.
****
2002-10 Sabiendo que las rectas $r: \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.
****
2001-4 Considera los puntos A(1, 0, 3), B(3, –1, 0), C(0, –1, 2) y D(a, b, –1). Halla a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D
****
Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean paralelas en sentido estricto (es decir, no coincidentes):

$$\mathbf{r: \frac{x-a}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2} \qquad r': \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}}$$

****
Demostrar que las rectas r y r' son paralelas en sentido estricto:

$$\mathbf{r: \begin{cases} y=-2x+1 \\ z=-3x+6 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} y=-2x-2 \\ z=-3x-8 \end{cases}}$$

Tomando $\mathbf{x=\lambda}$, las ecuaciones paramétricas de ambas serían:

$$\mathbf{r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=6-3\lambda \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=-8-3\lambda \end{cases}}$$

Viéndose que los vectores directores de ambas son iguales a $\vec{v}(1,-2,-3)$ y por tanto son paralelas.

****

Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean secantes:

$$r: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2} \qquad r': \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

****

Dada la recta r, determinar una recta r', paralela a r, que contenga al punto P(-1, 2, -6)

****

Demostrar que las rectas r y r' son paralelas en sentido estricto:

$$r: \begin{cases} y = -2x+1 \\ z = -3x+6 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} y = -2x-2 \\ z = -3x-8 \end{cases}$$

****

Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean paralelas en sentido estricto (es decir, no coincidentes):

$$r: \frac{x-a}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2} \qquad r': \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

****

Dado que ambas tienen el mismo vector de dirección $\vec{v}(4,2,2)$, serán siempre paralelas independientemente del valor de "a".

****

Determinar el valor de a para que las rectas r y r' sean secantes:

$$r: \frac{x-2}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2} \qquad r': \frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{3}$$

Pasemos a implícitas ambas rectas y estudiemos el sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas que se forma:

$$\left.\begin{array}{l} 6x-12=5y \\ 2y=6z+6 \\ 3x-3a=2y+2 \\ 3y+3=3z-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x-5y=12 \\ 2y-6z=6 \\ 3x-2y=2+3a \\ 3y-3z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x-5y=12 \\ y-3z=3 \\ 3x-2y=2+3a \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$$

El menor extraído de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 45-36 = 9 \neq 0$$

, luego r(A)=3

Para que las rectas sean secantes el determinante de la matriz ampliada habrá de ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2+3a \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6a-8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 6a-8 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-18a+24-3+6a-8-9) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (4-12a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

****

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Llamamos **bisectriz, b,** del ángulo que forman las rectas r y r' a la recta que divide a dicho ángulo en dos partes iguales.

Hay que observar que ***son dos*** las bisectrices que podemos trazar, para hallarlas utilizaremos los vectores directores de las rectas ***r y r'.***

Sean r y r' dos rectas secantes en un **punto P**, con vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$r: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} \qquad \text{y} \qquad r': \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}$$

- Si los vectores directores de las rectas tuviesen el mismo módulo, al sumarlos formaríamos un rombo, en el cual el vector suma y el vector diferencia serían las diagonales mayor y menor, respectivamente. En este caso, las diagonales del rombo son las bisectrices de los ángulos interiores, por tener los cuatro lados iguales y sus ángulos iguales dos a dos.
- Si los vectores no tienen el mismo módulo, normalizándolos obtenemos vectores directores de las rectas de módulo uno, y los vectores directores de las bisectrices serían el vector suma y el vector diferencia de los normalizados. Por tanto, las ecuaciones de sus bisectrices serán:

$$b_1: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot (\vec{u}' + \vec{v}') \qquad \text{y} \qquad b_2: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot (\vec{u}' - \vec{v}')$$

siendo $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ los vectores unitarios de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo

Vamos a hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{y} \quad s: (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(1,0,0). \text{ Con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si hallamos la posición relativa de las rectas, obtenemos que se cortan en el punto **P(2,2,-1).** Sea $\vec{u}$ **= (1, 2, -2)** el vector director de ***r*** de módulo $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{v} = (1,0,0)$ el vector director de ***s***, de módulo $|\vec{v}| = 1$.

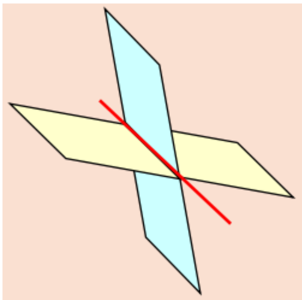
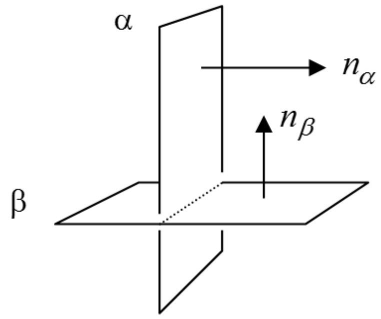
Normalizando $\vec{u}$ y $\vec{v}$, obtenemos $\vec{u}' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ y $\vec{v}' = (1,0,0)$: luego las ecuaciones de las bisectrices son:

$$b_1: (x,y,z) = (2,2,-1) + \lambda\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \qquad b_2: (x,y,z) = (2,2,-1) + \mu\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

<u>Posiciones relativas de dos planos</u>

Sean dos planos $\begin{cases} \alpha: ax + by + cz + d = 0; \ \vec{n}_\alpha = (a,b,c) \\ \beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0; \ \vec{n}_\beta = (a',b',c') \end{cases}$

PARALELOS	COINCIDENTES

 $\vec{n}_\alpha \ // \ \vec{n}_\beta$ y además $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$	 $\vec{n}_\alpha \ // \ \vec{n}_\beta$ y además $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$
SECANTES  $\vec{n}_\alpha \ // \ \vec{n}_\beta$	**SECANTES PERPENDICULARES**  $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$

En el caso que los planos sean secantes, la recta común viene determinada por el sistema de ecuaciones

Consideremos las matrices: $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

A) Si rango (M) = 1 = rango (M') los planos son coincidentes. $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

B) Si rango (M) = 1 y rango (M') = 2 los planos son paralelos. $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

C) Si rango (M) = 2 = rango (M') los planos son secantes. $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

Observa en el caso C) que la intersección de los dos planos secantes es la recta que tiene por ecuación implícita las de ambos planos.

<u>Actividades</u>

Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi\equiv 3x-y+2z-1=0$, $\pi'\equiv x+y-5z+4=0$. Solución. Los planos son secantes.

$\pi\equiv x+y-5z=-4$, $\pi'\equiv -3x-3y+15z=1$. Solución. Los planos son paralelos y distintos.

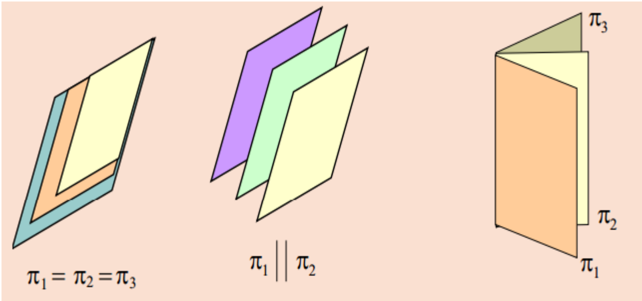
$\pi\equiv x+y-5z=-4$, $\pi'\equiv -3x-3y+15z=12$. Solución. Los planos son coincidentes.

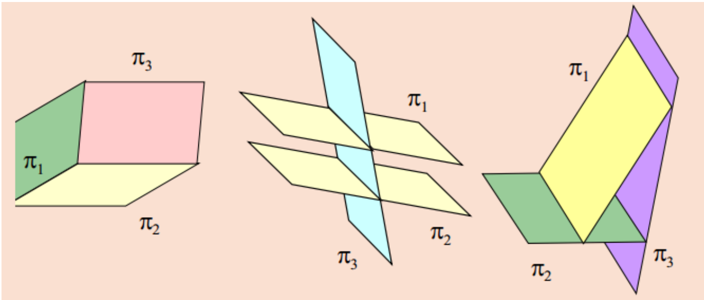
****

2001-12 Calcula a sabiendo que los planos $ax + y - 7z = -5$ y $x + 2y + a^2z = 8$, se cortan en una recta que pasa por el punto A(0, 2, 1) pero que no pasa por el punto B(6, –3, 2).

****

<u>Posiciones relativas de tres planos</u>



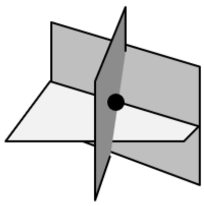
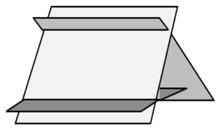
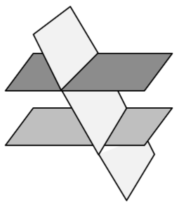
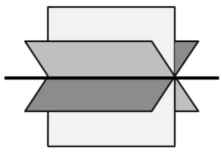
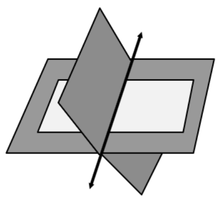


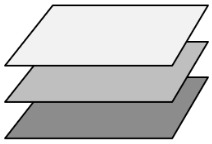
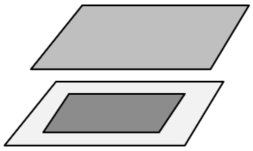
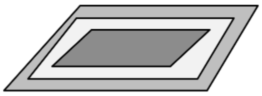
Las distintas posiciones relativas dibujadas dependerán del carácter del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

Si los tres planos π, π´ y π´´ vienen dadas por ecuaciones implícitas,

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi': \ A'x + B'y + C'z + D' = 0$$
$$\pi'': \ A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Sea el sistema formado por las tres ecuaciones, A la matriz de coeficientes y A* la ampliada

	Rango de A	Rango de A*	Posición relativa
Caso 1	3	3	Planos secantes en un punto. 
Caso 2	2	3	 a) Planos secantes dos a dos forman una superficie prismática.  b) Dos planos paralelos cortados por el otro.
Caso 3	2	2	 a) Planos distintos y se cortan en una recta.  b) Dos coincidentes y el otro los corta.

Caso 4	1	2	a) Planos paralelos y distintos dos a dos.  b) Dos son coincidentes y el otro paralelo a ellos y distinto 
Caso 5	1	1	Planos coincidentes. 

<u>Actividades</u>

¿Cuál es la intersección entre $3x + 2y - z = 4$, $x + 3y + z - 5 = 0$, $-x - y - 2z = -4$?
****

Estudia la posición de los tres planos: $3x - 2z = 9$, $y + z = 6$, $2y - z = 7$ y si tienen algún punto o recta en común, obtenerlo/a.
****

Comprueba que los tres planos siguientes son las tres caras laterales de un prisma triangular:
$\pi_1 \equiv 3x - 2y = 1$, $\pi_2 \equiv 4y - 3z + 2 = 0$, $\pi_3 \equiv z - 2x + 4 = 0$.
****

Determina la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones son: $\pi_1: x + y + 3z = 5$; $\pi_2 : 3x + 3y + 2z = 8$; $\pi_3 : 3z = 3$
****

Estudia la posición relativa de los planos: $x+3y+2z=0$, $2x-y+z=0$, $4x-5y-3z=0$.
Solución. Los tres planos se cortan en el (0,0,0) formando un triedro.
****

Calcula el valor de a para que los planos: $x+y+z=2$, $2x+3y+z=3$, $ax+10y+4z=11$ se corten en una recta.
Solución. $a = 7$
****

Estudia la posición de los tres planos: $3x-2z=9$, $y+z=6$, $2y-z=7$ y si tienen algún punto o recta en común, obtenerlo/a.

Solución. Se cortan en el punto $\left(\frac{37}{9}, \frac{39}{9}, \frac{15}{9}\right)$.
****

Comprueba que los tres planos siguientes son las tres caras laterales de un prisma triangular: $\pi_1 \equiv 3x-2y=1$, $\pi_2 \equiv 4y-3z+2=0$, $\pi_3 \equiv z-2x+4=0$. Solución. $|M|=0$, $|\overline{M}|\neq 0$ y no hay dos paralelos.
****

Estudia la posición relativa de los planos: $x+(1+\alpha)y+z=0$, $(2+\alpha)x-y-2z=0$, $3x-z=\alpha$ según los valores de α. Halla la intersección de los tres planos para el valor de α con el cual esta intersección contiene más de un punto.
Solución. Si $\alpha=0$ los tres planos pasan por una recta. Si $\alpha=3$ los tres planos forman un prisma triangular. Si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 3$ los tres planos se cortan en un punto. La solución para $\alpha=0$: $(x,y,z)=(1,-4,3)t$.
****

Sean los planos: $\pi_1 \equiv x+y+z=a-1$, $\pi_2 \equiv 2x+y+az=a$, $\pi_3 \equiv x+ay+z=1$. Se pide:

a) Estudiar, según los valores del parámetro a, su posición relativa.
b) Halla la intersección de los planos cuando a = 2.
Solución. a) Si a=1, los tres planos no tienen ningún punto común. Si a = 2, los tres planos se cortan en una recta. Si a ≠ 1 y a ≠ 2, los tres planos se cortan en un punto. b) Los tres planos se cortan en la recta (x,y,z)=(1,0,0)+(-1,0,1)t.
****

Sean los planos de ecuaciones: x-y-1=0, 2x+3y-5z+16=0, x+ay-z=0 donde a es un parámetro. Prueba que, salvo para un cierto valor a_0 de a, dichos planos se cortan en un cierto punto. Determina a_0 y prueba que para a = a_0 los planos se cortan dos a dos determinando un conjunto de tres rectas paralelas. Solución. $a_0 = 0$.
****

Se consideran los planos x+αy+αz=0, αx+y+αz=0, αx+αy+z=0. a) Determina el valor de α para el que dichos planos son distintos y forman haz. b) Determina el valor de α para el que dichos planos forman un triedro trirectángulo distinto del de coordenadas. Solución. a) α= $\frac{-1}{2}$. b) α≠1, α≠ $\frac{-1}{2}$.
****

Estudia, en función de los parámetros a, b, c, el sistema: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ x+y+z=b \\ x+y+z=c \end{array}\right\}$ Interpreta geométricamente los distintos casos. Solución. Si a=b=c S.C.I.

Un plano cuyos puntos son las soluciones del sistema. Si a, b y c no toman los tres el mismo valor, S.I. r(A) =1 y r(B) = 2. Tres planos paralelos. O bien, dos planos coincidentes y otro paralelo a éste si dos de los parámetros tuvieran el mismo valor.
****

Interpreta geométricamente en R^3 un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas y con el rango de la matriz de sus coeficientes igual a 2.
****

Considera los planos de $\mathfrak{R}^3$ dados por las ecuaciones: $\begin{array}{l} x+y+z=8 \\ ax+2y+bz=4 \\ ax+by+az=4 \end{array}$
Describe su posición relativa según los valores de a y b.
Halla su intersección en el caso a = 1, b = 2.
****

Para cada valor del parámetro real a se consideran los tres planos siguientes:
$\pi_1 \equiv x+y+a\,z=-2$, $\pi_2 \equiv x+a\,y+z=-1$, $\pi_3 \equiv a\,x+y+z=3$. Se pide:

a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta común.

****

Determinar, en función de los distintos valores de λ, la posición relativa de los planos
$\pi_1 \equiv x+y+\lambda z=1$ $\pi_2 \equiv 2x+\lambda y=1$ $\pi_3 \equiv \lambda x+y+z=1$
****

Estudia la posición relativa en función de "a" de los planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x+ay+z=1 \\ \pi_3 \equiv x+y+az=1 \end{cases}$
****

Determina que condición deben cumplir a y b para que los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+2y+2z=1 \\ \pi_2 \equiv x-2y-2z=2 \\ \pi_3 \equiv ax+y+z=b \end{cases}$ se corten en una misma recta Sol.: $2a-2b=1$

****

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x+y=1 \quad ; \quad ay+z=0 \quad ; \quad x+(1+a)y+az=a+1$$

a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común? Sol.: $a=1$

b) Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos. Sol.: Se cortan en una recta

****

Determinar, en función de los distintos valores de λ, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y+\lambda z=1 \quad \pi_2 \equiv 2x+\lambda y=1 \quad \pi_3 \equiv \lambda x+y+z=1$$

****

Estudia la posición relativa de los planos: $x+(1+\alpha)y+z=0$, $(2+\alpha)x-y-2z=0$, $3x-z=\alpha$ según los valores de α. Halla la intersección de los tres planos para el valor de α con el cual esta intersección contiene más de un punto.

****

Sean los planos: $\pi_1 \equiv x+y+z=a-1$, $\pi_2 \equiv 2x+y+az=a$, $\pi_3 \equiv x+ay+z=1$. Se pide:

a) Estudiar, según los valores del parámetro a, su posición relativa.

b) Halla la intersección de los planos cuando $a=2$.

****

Sean los planos de ecuaciones: $x-y-1=0$, $2x+3y-5z+16=0$, $x+ay-z=0$ donde a es un parámetro. Prueba que, salvo para un cierto valor a_0 de a, dichos planos se cortan en un cierto punto. Determina a_0 y prueba que para $a=a_0$ los planos se cortan dos a dos determinando un conjunto de tres rectas paralelas.

****

Se consideran los planos $x+\alpha y+\alpha z=0$, $\alpha x+y+\alpha z=0$, $\alpha x+\alpha y+z=0$.

a) Determina el valor de α para el que dichos planos son distintos y forman haz.

b) Determina el valor de α para el que dichos planos forman un triedro trirectángulo distinto del de coordenadas.

****

Se sabe que la siguiente matriz M tiene rango 1,

$$M=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

a) ¿Pueden determinarse a, b, c y d? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

b) ¿Cuál es la situación de los planos de ecuaciones respectivas

π_1: $5x+6y+7z=5$; π_2 : $x+ay+bz=2$; π_3 : $2x+cy+dz=1$?

****

Determinar los valores que deben tomar los números reales a y b para que los planos

$$\pi_1 : \{x+y+z=1\}; \quad \pi_2 : \{ax+y+z=1\}; \quad \pi_3 : \{x+ay+bz=1\}$$

i) Tengan un único punto común.

ii) Tengan una única recta común.

iii) Se corten dos a dos.

****

Estudia la posición relativa de los planos, según el valor de λ $\begin{cases} x+(\lambda+1)y+z=0 \\ x+y+(\lambda+1)z=0 \\ (\lambda+1)x+y+z=0 \end{cases}$

****

Para los diferentes valores del parámetro real a estudia la posición relativa de los planos dados por

$\pi_1 \equiv x+y+z=a-1$

$\pi_2 \equiv 2x+y+az=a$

$\pi_3 \equiv x+ay+z=1$ Si a = -1, ¿en qué punto se cortan?

****

Averigua la posición relativa de los siguientes 4 planos:

$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z = 0$, $\pi_2 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_3 \equiv x + 2y + 3z = 0$, $\pi_4 \equiv 3x + 5y + 4z = 1$.

Haz un dibujo que ilustre tus resultados.

****

2010-8 Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$x + y = 1$, $ay + z = 0$ y $x + (1 + a)y + az = a + 1$

(a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?

(b) Para a = 0, determina la posición relativa de los planos.

****

2008-9 Se sabe que los planos de ecuaciones $x + 2y + bz = 1$, $2x + y + bz = 0$, $3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta r.

(a) Calcula el valor de b.

(b) Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

****

2001-2 Considera el sistema $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x-my+z=4 \\ x+y+mz=m \end{cases}$.

(a) Discútelo según los valores de m.

(b) ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?

****

2001-13 Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 : x + y + z = 1$, $\pi_2 : x - y + z = 2$ y $\pi_3 : 3x + y + 3z = 5$. ¿Se cortan π_1 y π_2 ? ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

****

Estudia la posición relativa en función de "a" de los planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x+ay+z=1 \\ \pi_3 \equiv x+y+az=1 \end{cases}$

****

Determina la posición relativa de los planos de ecuaciones: $\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+ky+z=0\\ \pi_2 \equiv x-y-kz=3\\ \pi_3 \equiv 2x+3y+z=1\end{array}$ para los distintos valores de k

****

Determinar la posición relativa de los planos $\begin{cases}(a-2)x+y-z=-1\\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z=a\\ -x+ay+z=a\end{cases}$, según los valores de a.

****

Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro real k:

$$\begin{cases}\Pi_1 \equiv \; 2x+3y+k\,z=3\\ \Pi_2 \equiv \; x+k\,y-z=-1\\ \Pi_3 \equiv \; 3x+y-3z=-k\end{cases}.$$

En los casos en los que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

****

Determinar la posición relativa de los planos:

$$\pi:\begin{cases}x=5-3t+2s\\ y=6+2t-s\\ z=7-t+5s\end{cases} \qquad \pi':\begin{cases}x=2+7\mu\\ y=6+\lambda-3\mu\\ z=-5+13\lambda+24\mu\end{cases}$$

****

Determinar la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\pi: 2x+3y-z+8=0 \qquad \pi': -4x-6y+2z-16=0$

b) $\pi: 3x+2y-6z-7=0 \qquad \pi': 4x-y+z+2=0$

c) $\pi: 3x-y+z=-1 \qquad \pi': 6x-2y+2z=7$

d) $\pi: 3x-y+5z+1=0 \qquad \pi': 4x+y+7z+12=0$

****

Determinar la posición relativa de los planos:

$\alpha: x+y-z+2=0$

$\beta: 2x-y+3z+5=0$

$\gamma: 3x+2z+7=0$

****

Discutir, según los valores de m, la posición relativa de los planos:

$\pi: x+y+z=m+1$

$\pi': x+my+z=1$

$\pi'': mx+y+(m-1)z=m$

****

Determinar la posición relativa de los planos α,β,γ, de acuerdo con los valores de los parámetros a y b.

$\alpha: 3x-y+2z=1$

$\beta: x+4y+z=b$

$\gamma: 2x-5y+az=-2$

****

Demostrar que los planos α,β,γ se cortan en un punto. Determinar las coordenadas de dicho punto:

$\alpha: 2y - z = 7$
$\beta: 3x - 2z = 9$
$\gamma: y + z = 6$

****

Determinar el valor del parámetro m para que los planos α, β y γ se intercepten en una recta:

$\alpha: mx + y - z = 0$
$\beta: x + 3y + z = 0$
$\gamma: 3x + 10x + 4z = 0$

****

Determinar la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\pi: 2x + 3y - z + 8 = 0 \qquad \pi': -4x - 6y + 2z - 16 = 0$

b) $\pi: 3x + 2y - 6z - 7 = 0 \qquad \pi': 4x - y + z + 2 = 0$

c) $\pi: 3x - y + z = -1 \qquad \pi': 6x - 2y + 2z = 7$

d) $\pi: 3x - y + 5z + 1 = 0 \qquad \pi': 4x + y + 7z + 12 = 0$

a) Discutamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - z = -8 \\ -4x - 6y + 2z = 16 \end{array}\right\}$$

la matriz de coeficientes y la ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -8 \\ -4 & -6 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

como todos los menores de segundo orden que se pueden extraer de la matriz A son nulos ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

se tiene que r(A)=r(B)=1, el sistema es compatible e indeterminado con dos grados de indeterminación. Los dos son coincidentes.

b) Ahora el sistema a estudiar es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 6z = 7 \\ 4x - y + z = -2 \end{array}\right\}$$

En la matriz A de los coeficientes, el menor:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \neq 0$$

por tanto, r(A)=r(B)=2, el sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas son las dadas por el sistema de ecuaciones.

c) En el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + z = -1 \\ 6x - 2y + 2z = 7 \end{array}\right\}$$

Los tres menores de segundo orden extraídos de la matriz de los coeficientes son nulos, en efecto:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6+6=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6-6=0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2=0$$

por tanto, r(A)=1. Pero el ampliado $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 21+6=27 \neq 0 \Rightarrow r(B)=2$ El sistema es incompatible. Los planos son paralelos.

d) El sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+5z=-1 \\ 4x+y+7z=-12 \end{array}\right\}$$

Como el menor:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3+4=7 \neq 0$$

se tiene que r(A)=r(B)=2, el sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas vienen dadas por el sistema de ecuaciones

****

Determinar la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x=5-3t+2s \\ y=6+2t-s \\ z=7-t+5s \end{cases} \qquad \pi': \begin{cases} x=2+7\mu \\ y=6+\lambda-3\mu \\ z=-5+13\lambda+24\mu \end{cases}$$

Transformemos ambos planos a la forma implícita, en el primero tenemos que:

$$\begin{vmatrix} x-5 & -3 & 2 \\ y-6 & 2 & -1 \\ z-7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10(x-5)+3(z-7)-2(y-6)-4(z-7)-(x-5)+15(y-6)=0$$

$$\Rightarrow 10x-50+3z-21-2y+12-4z+28-x+5+15y-90=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 9x+13y-z-116=0$$

En cuanto al segundo:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 7 \\ y-6 & 1 & -3 \\ z+5 & 13 & 24 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 24(x-2)+91(y-6)-7(z+5)+39(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x-48+91y-546-7z-35+39x-78=0 \Rightarrow \pi': 63x+91y-7z-707=0$$

Discutamos ahora el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 9x+13y-z=116 \\ 63x+91y-7z=707 \end{array}\right\}$$

Como todos los menores de segundo orden que pueden extraerse de la matriz de los coeficientes son nulos como es fácil comprobar, r(A)=1 pero el ampliado $\begin{vmatrix} 9 & 116 \\ 63 & 707 \end{vmatrix} = -945 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 2$ y el sistema es incompatible. Los planos son paralelos.

****

Determinar el valor del parámetro m para que los planos α, β y γ se intercepten en una recta:

$$\alpha : mx + y - z = 0$$
$$\beta : x + 3y + z = 0$$
$$\gamma : 3x + 10x + 4z = 0$$

Los tres planos dados se interceptarán en una recta si el sistema de ecuaciones que forman en compatible e indeterminado con un grado de libertad, lo cual exige que r(A)=r(B)=2 y de aquí se deduce que:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12m + 3 - 10 + 9 - 10m - 4 = 0 \Rightarrow 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

****

Determinar la posición relativa de los planos:

$$\alpha : x + y - z + 2 = 0$$
$$\beta : 2x - y + 3z + 5 = 0$$
$$\gamma : 3x + 2z + 7 = 0$$

Estudiemos el sistema de ecuaciones que forman los tres.
El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 9 - 3 - 4 = 0 \Rightarrow r(A) \leq 2$$

Pero el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

entonces r(A)=2
Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 15 - 6 + 14 = 0 \Rightarrow r(B) = 2$$

El sistema es compatible e indeterminado con un grado de libertad. Los tres planos se cortan en una recta cuya ecuación implícita sería la determinada por las dos primeras ecuaciones del sistema anterior.

****

Discutir, según los valores de m, la posición relativa de los planos:

$$\pi: x + y + z = m + 1$$
$$\pi': x + my + z = 1$$
$$\pi'': mx + y + (m-1)z = m$$

En el sistema de ecuaciones que forman los tres, el determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + m + 1 - m^2 - 1 - m + 1 =$$
$$= m^2 - m + m + 1 - m^2 - 1 - m + 1 = -m + 1$$

De donde se tienen dos posibilidades:

1ª) Si m=1, entonces r(A)=1 ya que el sistema se convierte en:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$$

siendo nulo el determinante de la matriz de coeficientes, pero el menor de segundo orden extraído de ella:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

entonces r(A)=2. Orlando este menor con los términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3$$

El sistema es incompatible y los planos no se cortan los tres simultáneamente en punto alguno.
Analicemos las ecuaciones tomadas de dos en dos:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\}$$ claramente incompatible ya que r(A)=1 y r(B)=2. Estos dos planos son paralelos.

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$$ compatible e indeterminado con 1 grado de indeterminación, estos planos se cortan en una recta ya que r(A)=r(B)=2

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$$ compatible e indeterminado con un grado de indeterminación ya que r(A)=r(B)=2, estos dos planos se cortan en una recta.

En resumen, si m=1, de los tres planos dados, dos de ellos son paralelos y el tercero los corta a ambos según dos rectas paralelas.

2ª) Si $m \neq 1$, en el sistema inicial se tiene que r(A)=r(B)=3 siendo el sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un punto que pasamos a determinar por la regla de Crámer en función de m:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m^2-1)+m+1-m^2-m-1-m+1=$$

$$= m^3-m+m+1-m^2-m-1-m+1 = m^3-m^2-2m+1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & m & m-1 \end{vmatrix} = m-1+m^2+m+m-m-m-m^2+1=m$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2+m+m+1-m^3-m^2-1-m=$$

$$= m^3+m$$

Siendo el punto de corte de los tres planos:

$$P\left(\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m}, \frac{m}{1-m}, \frac{m^3+m}{1-m}\right)$$

****

Determinar la posición relativa de los planos α, β, γ, de acuerdo con los valores de los parámetros a y b.

$\alpha: 3x - y + 2z = 1$

$\beta: x + 4y + z = b$

$\gamma: 2x - 5y + az = -2$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones formado por las de los tres planos dados es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + 15 + a = 13a - 13$$

Y se anula para a=1. Como el menor de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13 \neq 0$$

podemos afirmar que:

<u>Para a = 1</u>: r(A)=2

Orlando el determinante anterior no nulo con los términos independientes tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2b - 5 - 81 + 15b - 2 = 13b - 39$$

que se anula para b=3

Entonces tenemos los siguientes casos:

1º) Si a = 1 y b = 3:

-

r(A)=r(B)=2. El sistema es compatible e indeterminado con un grado de indeterminación. Los tres planos se cortan en una recta cuyas ecuaciones implícitas son las formadas tomando las dos primeras ecuaciones del sistema formado por las de los tres planos.

2º) Si a=1 y $b \neq 3$:

-

-

$r(A) = 2 \neq r(B) = 3$. El sistema es incompatible. Veamos lo que sucede con los planos analizando los tres sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas que se pueden extraer del inicial:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{l} x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array}\right\}$$ tiene r(A)=r(B)=2. Los dos planos se cortan en una recta.

En este caso pues, los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas formando una superficie prismática.

Si $a \neq 1$:

Independientemente del valor de b, se tiene que r(A)=r(B)=3 siendo el sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un único punto cuyas coordenadas pasamos a determinar usando la regla de Crámer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix} = 4a + 10b + ab + 23$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = -a - 4b + 3ab + 4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b - 39$$

$$x = \frac{4a + 10b + ab + 23}{13a - 13}$$

$$y = \frac{-a - 4b + 3ab + 4}{13a - 13}$$

$$z = \frac{13b - 39}{13a - 13} = \frac{b-3}{a-1}$$

En resumen:

- Si a=1 y b=3, los tres planos se cortan en una recta
- Si a=1 y $b \neq 3$, los tres planos se cortan en tres rectas paralelas determinando una superficie prismática.
- Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto P de coordenadas $\left(\frac{4a+10b+ab+23}{13a-13}, \frac{-a-4b+3ab+4}{13a-13}, \frac{b-3}{a-1}\right)$

****

Demostrar que los planos α, β, γ se cortan en un punto. Determinar las coordenadas de dicho punto:

$\alpha : 2y - z = 7$

$\beta : 3x - 2z = 9$

$\gamma : y + z = 6$

Bastará ver que el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es compatible y determinado. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(B) = 3$$

sistema compatible y determinado.

Determinemos el punto de corte por la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24 - 9 + 14 - 18 = -37$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 3 & 9 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -18 - 21 = -39$$

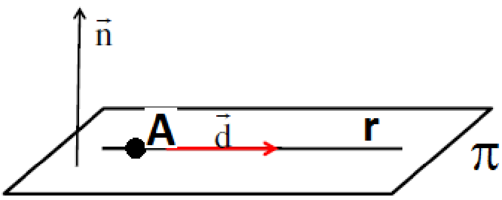
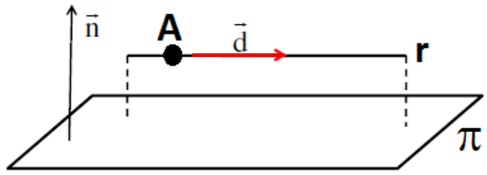
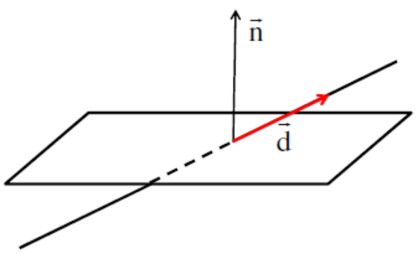
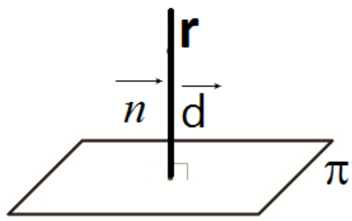
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 21 - 36 = -15$$

Es decir, los tres planos se cortan en P de coordenadas $P\left(\frac{37}{9}, \frac{39}{9}, \frac{15}{9}\right) = P\left(\frac{37}{9}, \frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$

****

Posiciones relativas de una recta y un plano

- *Sean una recta* $r(A; \vec{d})$ *y un plano* $\pi: ax + by + cz + d = 0$; $\vec{n} = (a, b, c)$

RECTA CONTENIDA EN EL PLANO	PARALELOS
 $A \in \pi$ *y* $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$	 $A \notin \pi$ *y* $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$
SECANTES	**SECANTES PERPENDICULARES**
 $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$ *y* $\vec{d}$ // $\vec{n}$	 $\vec{d}$ // $\vec{n}$

- Si $r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$ y $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, resolviendo el sistema se obtiene una ecuación con incógnita λ.

{Si la ecuación es incompatible⇒r // π Si la ecuación es compatible indeterminada⇒r⊂π Si la ecuación es

En el caso que sean secantes, el punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano

- Si $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ π: $A''x+B''y+C''z+D''=0$

Sea el sistema formado por las tres ecuaciones, A la matriz de coeficientes y A* la ampliada

	Rango de A	Rango de A*	Posición relativa
Caso 1	3	3	Secantes en un punto.
Caso 2	2	3	Paralelos
Caso 3	2	2	La recta contenida en el plano

Actividades

Indica cuál de las siguientes condiciones de paralelismo entre recta y plano es verdadera.

a) Una recta y un plano son paralelos o la recta está incluida en el plano si y sólo si el producto escalar de un vector director de la recta por el vector normal del plano es diferente a cero.

b) Una recta y un plano son paralelos o la recta está incluida en el plano si y sólo si el producto escalar de un vector director de la recta por el vector normal del plano es igual a cero.

c) Una recta y un plano son paralelos o la recta está incluida en el plano si y sólo si el producto escalar de un vector director de la recta por el vector director del plano es diferente a cero.

****

Demuestra que la condición necesaria y suficiente para que el plano Ax + By + Cz + D = 0 y la recta $\frac{x-a}{u}=\frac{y-b}{v}=\frac{z-c}{w}$ sean paralelos es que: Au + Bv + Cw = 0.

****

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas con el plano 3x − y + 4z − 2 = 0

$$a)\ \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2} \qquad b)\ x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1} \qquad c)\ \begin{cases} x=2-6t \\ y=4+2t \\ z=-8t \end{cases}$$

****

Estudia la posición relativa del plano π: 2x + y − z + 2 = 0, y la recta r: $\frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{-3}$

Sol.: Son paralelos

****

Halla el punto de intersección del plano x + 2y − z = 0 y la recta $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{cases}$. Sol.: P(2, 1, 4)

****

Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ y el plano π≡3x+2y-11z-5=0.

Solución. La recta y el plano son secantes. El punto de intersección es P(6,10,3).

****

Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ y el plano π≡2x+y-z-3=0.

Solución. La recta y el plano son secantes. El punto de intersección es P($\frac{4}{5}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{6}{5}$).

****

Se consideran la recta r≡{x-2y-2z=0, x+5y-z=0} y el plano π≡2x+y+mz=n.

a) ¿Para qué valores de m y n, r y π son secantes?
b) ¿Para qué valores de m y n, r y π son paralelos?
c) ¿Para qué valores de m y n, π contiene a la recta r?

Solución. a) m≠ $\frac{23}{7}$ b) m= $\frac{23}{7}$, n≠0 c) m= $\frac{23}{7}$, n=0.

****

Considera el plano mx + 5y + 2z = 0 y la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcula m y n para que la recta sea perpendicular al plano. Sol.: $m=3,\ n=5$

b) Halla m y n para que la recta esté contenida en el plano. Sol.: $m=2,\ n=-2$

****

Sea la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$

a) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.
b) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

****

Considera el plano π: 2x − y + nz = 0 y la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2},\ con\ m \neq 0$

(a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π. Sol.: $m=-8,\ n=\frac{-1}{2}$

(b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π. Sol.: $m=4,\ n=-2$

****

Dados el plano π: 2x +a y + z = b y la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$ Calcula a y b para que r esté contenida en π.

****

Determina b para que la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$ no corte al plano π: 2x − 4y +5z = 6 Sol.: $b=9$

****

Calcula el valor del parámetro k para que la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ sea paralela al plano π: kx + y + kz = 1. Sol.: $k=1$

****

Sea π el plano determinado por los puntos P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0) y R(0, 0, a), y sea la recta

$$r : \begin{cases} x-y=3 \\ 2x-z=3 \end{cases}$$

a) Obtén la ecuación de π. Sol.: $ax+ay+z-a=0$

b) Determina el valor de a para el que r y π son paralelos. Sol.: $a=-1$

c) Halla el valor de a para el que r y π son perpendiculares. Sol.: $a=\frac{1}{2}$

****

Calcular el valor de a para que la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax - y + z = 5$ sean paralelos.

****

Dados el punto A(3, 5, –1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$, halla el punto B de r tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano π: 3x – 2y + z + 5 = 0. Sol.: $B(-1,\ -3,\ -5)$

****

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas con el plano 3x − y + 4z − 2 = 0

$a)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-2}$ b) $x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ c) $\begin{cases} x=2-6t \\ y=4+2t \\ z=-8t \end{cases}$

****

Determínese si el plano $\pi \equiv 2x+3y-4=0$ corta o no al segmento de extremos A(2, 1, 3) y B(3, 2, 1)

****

Considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π: 2x − y + z = 0.

(a) Explica porqué la recta no está contenida en el plano para ningún valor de m.

Solución: Si $r \subset \pi$, todo punto de r pertenecería a π; pero $A(1,0,1) \in r$ y $A \notin \pi$. Luego, $r \not\subset \pi$

(b) Halla m para que la recta sea paralela al plano.

Solución: $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{d} \perp \vec{n}$ (siendo $\vec{d} = (m, 4, 2)$ un vector director de r y $\vec{n} = (2, -1, 1)$ un vector normal a π)

Por tanto, $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow 2m - 4 + 2 = 0 \rightarrow \boxed{m=1}$

****

Se considera el plano de ecuación ax + y + z +1 = 0 y las rectas:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$.

Determina a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

****

Probar que los planos –x + 2ay – 2az = 0, y x + ay – az = 0 se cortan en una recta r que pasa por el origen de coordenadas, cualquiera que sea el valor de a. Hallar la posición relativa de r con el plano 12x – (a+3)y +2z = 0 para los diferentes valores de a.

****

2016-12 Considera el plano π de ecuación 6x − my + 2z = 1 y la recta r dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

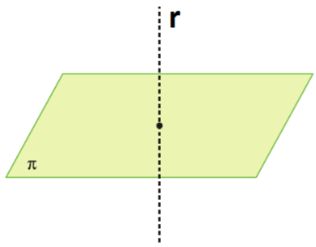
a) Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π.

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta **r** esté contenida en el plano π?

Resolución

$$\vec{d_r} = (-3,2,-1) \ ; \ \vec{n_\pi} = (6,-m,2)$$

$$\text{a) } r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d_r} \parallel \vec{n_\pi} \Leftrightarrow \frac{-3}{6} = \frac{2}{-m} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \boxed{m = 4}$$

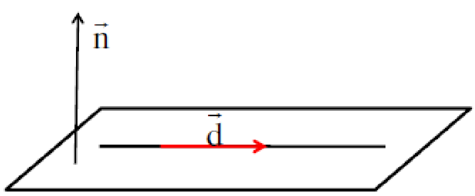


$$\text{b) } r \subset \pi \Rightarrow \vec{d_r} \perp \vec{n_\pi} \Rightarrow \vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \Rightarrow -3.6 + 2.(-m) + (-1).2 = 0 \Rightarrow m = -10$$

Para $m = -10, \ \pi : 6x + 10y + 2z = 1$

$A(1,-1,-2) \in r$ pero $A \notin \pi$, pues $6.1 + 10(-1) + 2(-2) \neq 1$ (A no cumple la ecuación de π)

Por tanto para $m = -10$, $r \not\subset \pi$. Luego, no existe ningún valor de m para el cual $r \subset \pi$



****

2015-6 Considera el plano π de ecuación mx + 5y +2z = 0 y la recta r dada por $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$

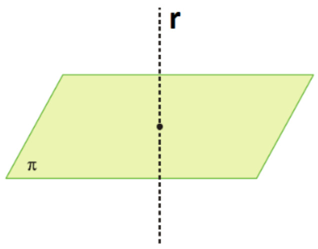
(a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π.

(b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

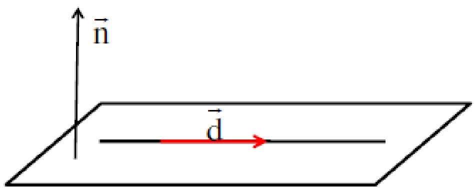
Resolución

Un vector director de r es $\vec{d_r} = (3, n, 2)$ $A(-1,0,1) \in r$; Un vector normal de π es $\vec{n_\pi} = (m, 5, 2)$

a) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d_r} \parallel \vec{n_\pi} \Leftrightarrow \frac{3}{m} = \frac{n}{5} = \frac{2}{2}$; luego, $\begin{cases} \frac{3}{m} = 1 \\ \frac{n}{5} = 1 \end{cases}$. Por tanto, $\boxed{m = 3\ ,\ n = 5}$



b) $r \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1,0,1) \in \pi \\ \vec{d_r} \perp \vec{n_\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(-1) + 5.0 + 2.1 = 0 \\ \vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 3m + 5n + 4 = 0 \end{cases}$. Por tanto, $\boxed{m = 4\ ,\ n = -2}$



****

2014-6 Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$.
Determina la posición relativa de π y r.

****

2010-10 Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$
con $m \neq 0$.
(a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
(b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

****

2009-1 Considera el punto P(1 , 0 , 0), la recta r definida por $x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$
y la recta s definida por $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, 2, 0)$. Estudia la posición relativa de r y s

****

2008-6 Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{cases}$ y el plano π definido por $x + my - z = 1$
(a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?
(b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?
(c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m = 0$?

****

2007-7 Considera la recta r definida por $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x - y + \beta z = 0$.
Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

(a) La recta r es perpendicular al plano π.

(b) La recta r está contenida en el plano π.

****

2006-5 Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$

(a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.

(b) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

(c) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

****

2005-11 Considera un plano $\pi : x + y + mz = 3$ y la recta $r : x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$

(a) Halla m para que r y π sean paralelos.

(b) Halla m para que r y π sean perpendiculares.

(c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ?

****

2004-8 Considera los puntos $P(6, -1, -10)$, $Q(0, 2, 2)$ y R, que es el punto de intersección del plano π : $2x + \lambda y + z - 2 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

****

2003-6 Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in R) \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \quad (\alpha, \beta \in R) \\ z = \beta \end{cases}$$

Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.

****

2003-11 Considera el plano $\pi : x - 2y + 1 = 0$ y la recta $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$

Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

****

2002-12 Considera la recta r y el plano π siguientes: $r : \begin{cases} x + z - a = 0 \\ y - az - 1 = 0 \end{cases}$, $\pi : 2x - y = b$.

(a) Determina a y b sabiendo que está contenida en π.

(b) Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π.

****

Determinar la posición relativa de la recta r y el plano π:

$$\mathbf{r} : \begin{cases} \mathbf{x + y - z = 2} \\ \mathbf{2x - y + z = 1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{4x + y - z = 3}$$

$$r:\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-y+2z=3\end{cases}$$

$$\pi: x-y+3z=5$$

****

Determinar la posición relativa de las r y r' con respecto al plano π:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z+3}{2}\qquad r':\frac{x-7}{6}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{5}\qquad \pi: x+2y+4z-13=0$$

****

Determinar el parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{2}\qquad \pi: 4x+my+z-2=0$$

****

Determinar la posición relativa de la recta r y el plano π:

$$r:\begin{cases}x+y-z=2\\ 2x-y+z=1\end{cases}$$

$$\pi: 4x+y-z=3$$

Trataremos de resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas formado por las ecuaciones de la recta y el plano. El determinante de sus coeficientes es:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=1+4-2-4-1+2=0$$

Pero el menor:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$$

, lo cual implica que r(A)=2.

Orlando este menor con los términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3+4+4+8-1-6=6\neq 0$$

, lo cual implica que r(B)=3

El sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

****

Determinar la posición relativa de la recta r y el plano π:

$$r:\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-y+2z=3\end{cases}$$

$$\pi: x-y+3z=5$$

Procediendo como en el problema anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6+2-1+1+4-3=-3 \neq 0$$

de donde r(A)=3=r(B)

El sistema es compatible y determinado. La recta r corta al plano π en el punto P cuyas coordenadas vamos a determinar resolviendo el sistema por Crámer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3+10-3+5+2-9=2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 18+2+5-3-20-3=-1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10+3-1+1+6-5=-6$$

Siendo las coordenadas de P:

$$P\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},2\right)$$

****

Determinar la posición relativa de las r y r' con respecto al plano π:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2} \qquad r': \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{5} \qquad \pi: x+2y+4z-13=0$$

Pasemos r y r' a la forma implícita:

$$r: \begin{cases} -5x+5=2y+10 \\ 2x-2=2z+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y+5=0 \\ 2x-2z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y+5=0 \\ x-z-4=0 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} -2x+14=6y+18 \\ 5x-35=6z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6y+4=0 \\ 5x-6z-29=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+2=0 \\ 5x-6z-29=0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de r y π es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+2y=-5 \\ x-z=4 \\ x+2y+4z=13 \end{array}\right\}$$

Cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2+10-8=0$$

Pero como:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$
, se tiene que r(A)=2

Orlando este menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 8 - 10 - 40 - 26 = -68 \neq 0$$
, se tiene que r(B)=3

La recta r y el plano π son paralelos.

En cuanto al sistema formado por r' y π, es:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = -2 \\ 5x - 6z = 29 \\ x + 2y + 4z = 13 \end{array}\right\}$$

Siendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18 + 12 - 60 = -66 \neq 0$$
, se tiene que r(A)=r(B)=3

r' y π se cortan en un punto P que determinamos ahora:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 29 & 0 & -6 \\ 13 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -234 - 24 - 348 = -606$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 29 & -6 \\ 1 & 13 & 4 \end{vmatrix} = 116 + 12 + 78 + 40 = 246$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 29 \\ 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 87 - 20 - 58 - 195 = 186$$

entonces es:

$$P\left(\frac{606}{66}, \frac{-246}{66}, \frac{186}{66}\right) = \left(\frac{101}{11}, -\frac{41}{11}, \frac{31}{11}\right)$$

En cuanto a la posición relativa de r y r' hemos de estudiar el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+2y=-5 \\ x-z=4 \\ x+3y=-2 \\ 5x-6z=29 \end{array}\right\}$$

La matriz de los coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

en la que el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2+15=13\neq 0$$

, entonces r(A)=3

El determinante de la matriz ampliada es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 25 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & -5 & 25 \\ -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -(-18-75+12+135) = -240 \neq 0$$

entonces r(B)=4 y r y r' se cruzan.

Es decir, r es paralela a π, r' corta a π en el punto P y r, r' se cruzan en el espacio

****

Determinar el parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{2} \qquad \pi: 4x+my+z-2=0$$

r será paralela a π si el sistema de ecuaciones formado por las implícitas de r y la de π es incompatible. Dicho sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-4=2y+10 \\ 2x-2=2z-6 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-2y=14 \\ 2x-2z=-4 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-z=-2 \\ 4x+my+z=2 \end{array}\right\}$$

El sistema será incompatible si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4+2m+1=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{2}$$

y para este valor π y r son paralelos.

****