

Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Contrôle à posteriori de l'épreuve
Banque PT: MATHS II-A.

Premier exercice.

1°) Soit à calculer $I(x) = \int \operatorname{Arctan}(2t) dt$. Effectuons une intégration par parties en posant:

$$\{u = \operatorname{Arctan}(2t) \quad v' = 1 \quad \text{on a } \{u' = \frac{2}{1+4t^2} \quad v = t \quad \text{d'où}$$

$$I(x) = t\operatorname{Arctan}(2t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+4t^2} dt \text{ soit enfin:}$$

$$I(x) = x\operatorname{Arctan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) \Big|_0^x$$

$$\textbf{conclusion} \quad \int \operatorname{Arctan}(2t) dt = x\operatorname{Arctan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2).$$

2°) La formule des accroissements finis donne:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta(x) \in]0, 1[; \sin x - \sin 0 = x \cos(x\theta(x)) \text{ d'où } |\sin x| = |x \cos(x\theta(x))| \leq |x|.$$

$$\textbf{conclusion} \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|.$$

3°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \int \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

Domaine de définition:

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (prolongement par continuité en 0 par x^2)

elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème d'intégrale généralisée est

donc en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} \leq e^{-t}$ et $\int e^{-t} dt = e^{-1}$ est convergente.

Le théorème de comparaison pour les fonctions positives assure la convergence de

$$\int \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt.$$

conclusion $\operatorname{Def}(f) = \mathbb{R}$ et f est une fonction paire.

Continuité:

Soit $h(x, t) = \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t}$. h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. On va alors écrire :

$$f(x) = \int \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt + \int \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt = f_1(x) + f_2(x).$$

◦ Le théorème simple concernant la continuité d'une intégrale au sens de Riemann dépendant d'un paramètre s'applique sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

◦ Sur $\mathbb{R} \times [1, +\infty[$, $|h(x, t)| \leq e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[1, +\infty[$ et telle que

$\int e^{-t} dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f_2 est continue sur R .

conclusion f est continue sur R .

Dérivabilité:

$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur $R \times [0, +\infty[$, (prolongement par continuité en un point $(x, 0)$ par $2x$)

◦ Le théorème simple concernant la dérivabilité d'une intégrale au sens de Riemann dépendant d'un paramètre s'applique sur $R \times [0, 1]$, f_1 est de classe C^1 sur R et

$$\forall x \in R, f_1'(x) = \int \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt.$$

◦ Sur $R \times [1, +\infty[$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[1, +\infty[$ et telle

que $\int e^{-t} dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f_2 est de classe C^1 sur R et

$$\forall x \in R, f_2'(x) = \int \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt.$$

conclusion f est de classe C^1 sur R , et $\forall x \in R, f'(x) = \int \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt$.

Dérivée seconde:

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 2\cos(2xt)e^{-t}$ est continue sur $R \times [0, +\infty[$. On peut cette fois conclure directement:

Sur $R \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[0, +\infty[$ et telle

que $\int 2e^{-t} dt = 2$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f est de classe C^2 sur R et

$$\forall x \in R, f''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt) e^{-t} dt.$$

conclusion f est de classe C^2 sur R , et

$$\forall x \in R, f''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt) e^{-t} dt.$$

NB: Je n'ai pas vu l'intérêt de faire prouver le caractère C^2 de f sur $] -a, a[$, puisque on peut l'obtenir directement le résultat sur R .

4°) Calcul de $f''(x)$

Une primitive de $2\cos(2xt)e^{-t}$ est de la forme $A = e^{-t}[a\cos(2xt) + b\sin(2xt)]$. On a:

$$A' = e^{-t}[(-a + 2xb)\cos(2xt) + (-2ax - b)\sin(2xt)] \quad \text{ce qui conduit au système:}$$

$$\begin{cases} -a + 2xb = 2 \\ -2xa - b = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } a = -\frac{2}{1+4x^2}, \quad b = \frac{4x}{1+4x^2} \quad \text{et par suite :}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} \quad \text{Conclusion } f(x) = \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + \arctan(2x)$$

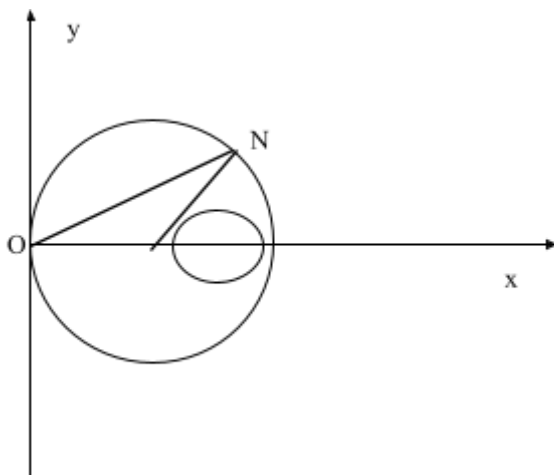
5°) Comme $f'(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2}{1+4x^2} dx = \arctan(2x)$.

Comme $f(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \arctan(2t) dt$ et donc :

$$\text{Conclusion } f(x) = x \arctan(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2)$$

Deuxième exercice.

1°) Le point N est défini par $\vec{ON} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega N}$.



2°) Les coordonnées de N sont: $x = 1 + \cos\theta, y = \sin\theta$.

La hauteur issue de N a pour équation: $x = 1 + \cos\theta$.

La hauteur issue de Ω a pour équation $(1 + \cos\theta)(x - 1) + y \sin\theta = 0$.

L'orthocentre H du triangle OΩN a donc pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \cos\theta \\ y_H = -\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta} \end{cases} \quad \theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$$

Rq: Quand $\theta \rightarrow \pm \pi$ $H \rightarrow 0$.

Quand $\theta \rightarrow 0$ $x_H \rightarrow 2$ $y_H \rightarrow \pm \infty$, il y a asymptote d'équation $x = 2$.

Si on prend pour nouveau paramètre $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, $t \in \mathbb{R}$ les coordonnées de H deviennent:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y_H = -\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}{\frac{2t}{1+t^2}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit :}$$

$$(\Gamma): \begin{cases} x = \frac{2}{t^2+1} \\ y = \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Rq: En reprenant le paramétrage en θ , on a $\begin{cases} x-1 = \frac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ y = -\frac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} x-1 = \frac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \\ y = \frac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Dès lors, en prenant des coordonnées polaires de centre Ω , avec $\omega = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$, l'équation polaire de (Γ) est:

$$\rho = -\frac{\cos(2\omega)}{\cos\omega} \text{ et on reconnaît la \underline{strophoïde}.}$$

3°) Equation de la droite Δ_t passant par les points $M_1(t)$ et $M_2(\frac{1}{t})$.

$$\vec{M_1M_2} = \left(\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}, \frac{t^2(1-t^2)+1-t^2}{t(t^2+1)} \right) \text{ est parallèle à } \left(\frac{2}{t^2+1}, \frac{-1}{t} \right)$$

(le cas $t = \pm 1$ qui correspond à $M_1 = M_2 = \Omega$ étant à exclure, car alors la droite M_1M_2 n'est pas définie).

Equation de la droite $\Delta_t: \frac{1}{t} \left(x - \frac{2}{t^2+1} \right) + \frac{2}{t^2+1} \left(y - \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} \right) = 0$ soit sous une autre forme:

$$\Delta_t: x + \frac{2t}{t^2+1} - \left(\frac{2t}{t^2+1} \right)^2 = 0.$$

On voit que le bon paramètre pour étudier l'enveloppe de la famille des Δ_t est $u = \frac{2t}{t^2+1} = \sin\theta$

et par suite avec $u \in]-1, 1[$. On a alors $\Delta_u: u^2 - uy - x = 0$, et la résolution du système

$$\{\Delta_u, \Delta'_u$$

revient à écrire que l'équation du deuxième degré en u a une racine double.

L'enveloppe est donc incluse dans la parabole d'équation $y^2 + 4x = 0$.

Plus précisément, on a : $\Delta'_u: 2u - y = 0$ et donc le paramétrage de l'enveloppe est:

$$(E): \{x = -u^2, y = 2u \mid u \in]-1, 1[\}$$

conclusion (E) est la partie de la parabole d'équation $y^2 = -4x$ pour $-2 < y < 2$ et $y \neq 0$.

4°) Intersection de la droite $y = ax$ avec (Γ) .

L'équation aux t des points d'intersection est : $\frac{t^2-1}{t(t^2+1)} = a \frac{2}{t^2+1}$ soit : $t^2 - 2at - 1 = 0$.

On ne retrouve pas l'origine au moyen de cette relation car 0 est obtenu pour $t \rightarrow \pm \infty$.

L'équation est du deuxième degré avec $\Delta' = a^2 + 1 > 0$. Elle admet donc toujours deux racines

t_1 et t_2 distinctes.

Lorsque $a \neq 0$, t_1 et t_2 sont différents de ± 1 et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont distincts.

Lorsque $a = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont confondus avec Ω .

Le point P a pour coordonnées $(1, a)$.

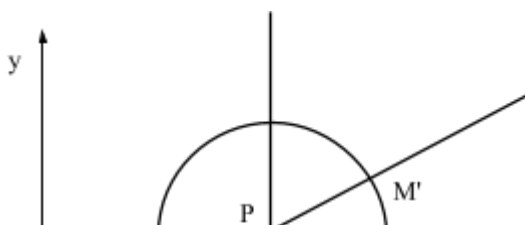
On a $\vec{P\Omega} = (0, a)$ d'où $\|\vec{P\Omega}\|^2 = a^2$.

$\vec{PM}$ et $\vec{PM'}$ ont pour composantes $\left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} - a \right) = \left(\frac{1}{at+1} - 1, \frac{a}{at+1} - a \right)$ puisque $t^2 - 2at - 1 = 0$.

soit encore: $\frac{1}{at+1}(-at - a^2t)$ de sorte que $\|\vec{PM}\|^2 = \|\vec{PM'}\|^2 = a^2$

conclusion $\|\vec{PM}\| = \|\vec{PM'}\| = \|\vec{P\Omega}\| = |a|$.

D'où une construction géométrique des points de (Γ) .



Troisième exercice.

1°) Soit $(S): x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2$; $(P_\lambda): z = \lambda y + 1$; $(C_\lambda) = (S) \cap (P_\lambda)$.

(S) est une quadrique qui, quand on l'a coupe par des plans:

$x = Cte$ fournit des hyperboles.

$y = Cte$ ellipses.

$z = Cte$ hyperboles.

(S) est un hyperboloïde à une nappe. Il n'est pas de révolution car dans son équation "quasi réduite", les coefficients de x^2 et z^2 sont distincts.

2°) L'aire du domaine intérieur à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ est :

$A = \iint_D dx dz$, $D = \left\{ (x, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. On fait le changement de variables classique:

$\{x = a \cos \theta \quad z = b \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad Jac = ab\rho$. On a alors:

$A = \int \int ab \rho d\rho d\theta$. On intègre

sur un pavé une fonction, produit d'une fonction constante de θ par une fonction de ρ .

L'intégrale se transforme en un produit de deux intégrales simples.

$$\textbf{conclusion} \quad A = ab \int d\theta \times \int \rho d\rho = \pi ab.$$

Le volume demandé s'obtient en intégrant de 0 à 1 l'aire de la section d'indice y de (S) .

La section (S_y) de (S) par le plan parallèle à Oxz d'ordonnée y est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{2(1+y^2)} + \frac{z^2}{1+y^2} = 1, \text{ dont l'aire est } \pi\sqrt{2}(1+y^2) \text{ et ainsi } V = \int \pi\sqrt{2}(1+y^2)dy = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.$$

$$\textbf{conclusion} \quad V = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.$$

3°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. $(C_\lambda): \{z = \lambda y + 1 \quad x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2\}$. L'équation de la projection orthogonale de

(C_λ) sur Oxy s'obtient en éliminant z entre les deux équations. On obtient:

$$x^2 - 2y^2 + 2(\lambda y + 1)^2 - 2 = 0 \quad \text{soit : } x^2 + 2(\lambda^2 - 1)y^2 + 4\lambda y = 0.$$

Il s'agit de l'équation d'une conique dont la nature est donnée par le signe de $\lambda^2 - 1$.

conclusion

$\{|\lambda| > 1 \quad \text{il s'agit d'une ellipse} \quad |\lambda| = 1 \quad \text{il s'agit d'une parabole} \quad |\lambda| < 1 \quad \text{il s'agit d'une hyperbole}$

Etude des cas demandés:

$\lambda = 0$; $x^2 - 2y^2 = 0$ la projection est alors la réunion des deux droites d'équations $x = \pm \sqrt{2}y$.
(on est cependant dans le cas type hyperbole)

$\lambda = \frac{1}{2}$; $x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 2y = 0$ soit $x^2 - \frac{3}{2}(y - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = 0$ soit enfin $\frac{(y - \frac{2}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2} - \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = 1$.

C'est l'équation réduite d'une hyperbole.

$\lambda = 1$; $x^2 + 4y = 0$ la projection est alors une parabole.

$\lambda = 2$; $x^2 + 6y^2 + 8y = 0$ soit $x^2 + 6(y + \frac{2}{3})^2 - \frac{8}{3} = 0$ soit enfin $\frac{(y + \frac{2}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{x^2}{(2\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1$.

C'est l'équation réduite d'une ellipse.

Ceci permet de déduire la nature de (C_λ) que l'on peut interpréter comme l'intersection du cylindre de génératrices parallèles à Oz et de base les coniques précédentes, avec le plan (P_λ) . Les (C_λ) sont de même nature que ces coniques.

conclusion (C_0) est constituée des deux droites $\{z = 1 \quad x = \sqrt{2}y \text{ et } \{z = 1 \quad x = -\sqrt{2}y$
et pour le reste:

$\{|\lambda| > 1 \quad (C_\lambda) \text{ est une ellipse} \quad |\lambda| = 1 \quad (C_\lambda) \text{ est une parabole} \quad |\lambda| < 1 \quad (C_\lambda) \text{ est une hyperbole}$

(C_λ) peut-elle être un cercle?

A priori, il n'est pas impossible que (C_λ) soit un cercle. Si c'est le cas ce sera pour des valeurs de λ de module strictement plus grand que 1. Mais ceci semble être l'objet de la dernière question.

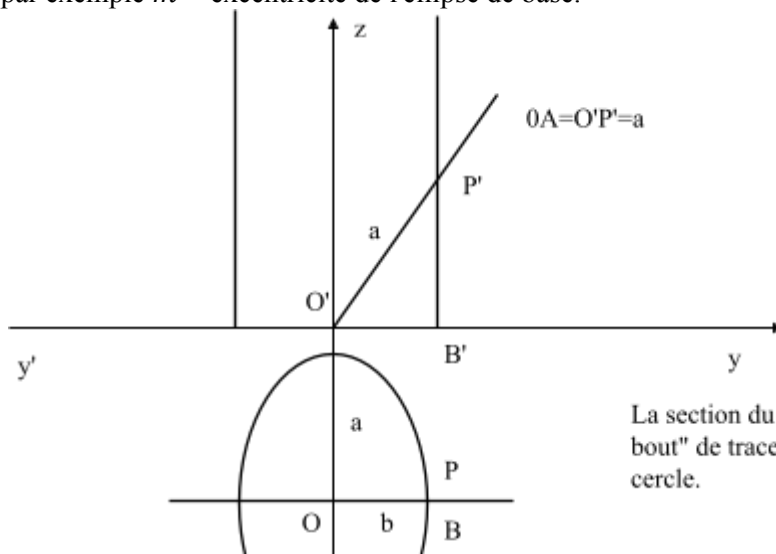
Rq: Sur un cylindre ayant une base elliptique, il existe toujours des sections qui sont des cercles. En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que le cylindre a ses génératrices parallèles

à Oz et a pour base l'ellipse du plan $z = 0$, d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$.

Alors, la section du cylindre par un plan "de bout" d'équation $z = my$ est une ellipse dont l'un des axes est porté par Ox et a pour demi longueur a , et dont l'autre est porté par l'intersection

des plans $x = 0$ et $z = my$ et a pour demi longueur $b\sqrt{1 + m^2}$.

On aura donc un cercle lorsque $a = b\sqrt{1 + m^2}$ soit $m = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. On peut donc prendre par exemple $m = \text{excentricité de l'ellipse de base}$.



La section du cylindre par le plan "de bout" de trace frontale $O'P'$ est un cercle.

4°) Un vecteur orthogonal au plan (P_λ) est $(0 \lambda - 1)$. On choisira par exemple

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(0 \lambda - 1). \text{ On}$$

peut alors prendre $\vec{I} = (1 \ 0 \ 0)$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(0 \ -1 \ -\lambda)$, d'où la matrice de passage suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 & -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \text{ et les formules de passage:}$$

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-Y + \lambda Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\lambda Y - Z) \end{cases}$$

L'équation de (S) dans ce nouveau repère est :

$$X^2 - \frac{2}{\lambda^2+1}(-Y + \lambda Z)^2 + \frac{2}{\lambda^2+1}(\lambda Y + Z)^2 - 2 = 0 \text{ soit :}$$

conclusion Dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ $(S): X^2 + 2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}(Y^2 - Z^2) + 8\frac{\lambda}{\lambda^2+1}YZ - 2 = 0.$

L'équation de (P_λ) dans le nouveau repère est : $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}(-\lambda Y - Z) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}(-Y + \lambda Z) + 1$
soit: $Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}.$

(C_λ) est alors définie dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par :

$$\{Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \quad X^2 + 2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}Y^2 - 8\frac{\lambda}{(\lambda^2+1)\sqrt{\lambda^2+1}} - 2 - 2\frac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)^2} = 0$$

soit

$$\{Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \quad X^2 + 2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(Y - \frac{2\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 = K \text{ avec}$$

$$K = \frac{[2(\lambda^2+1)^2 + 2(\lambda^2-1)](\lambda^2-1) + 8\lambda^2}{(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)^2}$$

soit encore $K = \frac{2\lambda^6 + 4\lambda^4 + 2\lambda^2}{(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)^2} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}.$

conclusion Dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, (C_λ) :

$$\{Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \quad X^2 + 2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(Y - \frac{2\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}$$

Ce sera un cercle si $2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} = 1$ soit $\lambda^2 - 3 = 0$. Il y a donc deux valeurs possibles de λ . D'où :

$(C_{\sqrt{3}}): \{Z = -\frac{1}{2} \quad X^2 + (Y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ associé à $\lambda = \sqrt{3}$ et dans le repère

fixe d'origine: $(C_{\sqrt{3}}): \{z = \sqrt{3}y + 1 \quad x^2 + 4y^2 + 4\sqrt{3}y = 0 \text{ rayon } R = \sqrt{3}, \text{ centre } (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}.$

$(C_{\sqrt{3}}): \{Z = -\frac{1}{2} \quad X^2 + (Y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 \text{ dans le repère } (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \text{ associé à } \lambda = -\sqrt{3} \text{ et dans le repère}$

fixe d'origine: $(C_{\sqrt{3}}): \{z = -\sqrt{3}y + 1 \quad x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \text{ rayon } R = \sqrt{3}, \text{ centre } (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})\}.$

Quatrième exercice.

1°) Soit $a \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions opposées si $a \neq 0$ et une solution double, $z = 0$, si $a = 0$.

Si on note $a = |a|e^{i\theta} \quad \theta \in]-\pi, \pi]$ les solutions de $z^2 = a$ sont $z = \pm \sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2°) Dans $M_2(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire car le polynôme

caractéristique est systématiquement scindé. A est donc semblable à $(\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$.

La trace et le déterminant de deux matrices semblables étant les mêmes, on a, si $A = (a \ c \ b \ d)$:

$$\{\alpha + \beta = \text{tr}(A) = a + d \quad \alpha\beta = \det(A) = ad - bc$$

On en déduit

$$(A - \alpha Id)(A - \beta Id) = A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta Id = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)Id$$

soit

$$(a^2 + bc c(a + d) b(a + d) bc + d^2) - (a + d)(a c b d) + (ad - bc)(1 \ 0 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

3°) On suppose A diagonalisable. Cela veut dire que A est semblable à une matrice diagonale.

Autrement dit $\exists P$ inversible telle que $P^{-1}AP = (\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$ avec les éventualités suivantes:

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$ cas où A est inversible, avec deux valeurs propres distinctes.

$\alpha \neq 0, \beta = 0$ cas où A n'est pas inversible et $A \neq O$.

$\alpha = \beta$ cas où $A = \alpha Id$.

4°) On suppose A non diagonalisable.

A admettant toujours des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, si A avait deux valeurs propres distinctes elle serait diagonalisable. Donc A admet une valeur double α .

Il existe $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, sinon, on aurait: $\forall u \in \mathbb{C}^2, (A - \alpha Id)(u) = 0$ ce qui voudrait dire que $A = \alpha Id$, et alors A serait diagonalisable.

Soit donc $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, et posons $v = (A - \alpha Id)(u)$. Montrons que (u, v)

est une famille libre, ce qui assurera que c'est une base de $\mathbb{C}^2$.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv = 0$. On a donc $au + b(A - \alpha Id)(u) = 0$. Appliquons

alors $(A - \alpha Id)$ à cette égalité, on obtient: $a(A - \alpha Id)(u) + b(A - \alpha Id)^2(u) = 0$ soit, puisque

$$(A - \alpha Id)^2 = 0, \quad a(A - \alpha Id)(u) = 0, \text{ donc } a = 0 \text{ et par suite } b = 0.$$

Mais alors dans la base (u, v) , l'endomorphisme f de matrice A relativement à la base canonique de C^2 aura pour matrice $(\alpha \ 0 \ 1 \ \alpha)$, et on aura donc $(\alpha \ 0 \ 1 \ \alpha) = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v) . En effet:

$$f(u) = A(u) = (A - \alpha Id)(u) + \alpha u = \alpha u + v \text{ et}$$

$$f(v) = A(v) = A(A - \alpha Id)(u) = (A - \alpha Id)^2(u) + \alpha(A - \alpha Id)(u) = 0 + \alpha v = \alpha v.$$

5°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = (\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

Une matrice Z solution doit commuter avec A puisque $AZ = ZA = Z^3$. Notons $Z = (a \ c \ b \ d)$.

$$ZA = (\alpha a \ c\beta \ b\alpha \ d\beta) \quad , \quad AZ = (\alpha a \ c\alpha \ b\beta \ d\beta) \quad \quad AZ = ZA \Rightarrow \{c = 0 \ b = 0 \text{ et donc } Z = (a \ 0 \ 0 \ d).$$

L'équation $Z^2 = A$ s'écrit $(a^2 \ 0 \ 0 \ d^2) = (\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$ et il y a donc quatre solutions à l'équation.

conclusion $Z = \left(\varepsilon \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} \ 0 \ 0 \ \varepsilon' \sqrt{|\beta|} e^{i\frac{\theta'}{2}} \right)$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, $\beta = |\beta| e^{i\theta'}$.

6°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = (\alpha \ 0 \ 0 \ 0)$, $\alpha \neq 0$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A .

$$ZA = (\alpha a \ 0 \ b\alpha \ 0) \quad , \quad AZ = (\alpha a \ c\alpha \ 0 \ 0) \quad \quad AZ = ZA \Rightarrow \{c = 0 \ b = 0 \text{ et donc } Z = (a \ 0 \ 0 \ d).$$

L'équation $Z^2 = A$ s'écrit $(a^2 \ 0 \ 0 \ d^2) = (\alpha \ 0 \ 0 \ 0)$ et il y a donc deux solutions à l'équation.

conclusion $Z = \left(\varepsilon \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} \ 0 \ 0 \ 0 \right)$, $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$.

7°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = (\alpha \ 0 \ 0 \ \alpha)$, $\alpha \in C$.

Cas $\alpha = 0$. Alors les matrices $Z = (0 \ a \ 0 \ 0)$ $a \in C$ vérifient $Z^2 = 0$, il y a donc une infinité de solutions.

Cas $\alpha \neq 0$. Soit f un endomorphisme involutif, c'est à dire tel que $f^2 = Id$. Il en existe une infinité. En effet, si E_1 et E_2 sont deux sous espaces de C^2 de dimension 1 tels que

$C^2 = E_1 \oplus E_2$, l'endomorphisme f défini par $f(u) = u_1 - u_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_i \in E_i$ est involutif.

Dès lors l'endomorphisme $g = \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} f$ vérifie $g^2 = \alpha Id$ et sa matrice Z vérifiera $Z^2 = A$. On a donc une infinité de solutions encore dans ce cas.

8°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = (\alpha \ 0 \ 1 \ \alpha)$, $\alpha \in C$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A .

$$ZA = (\alpha a + c \ c\alpha \ b\alpha + d \ d\alpha) \quad , \quad AZ = (\alpha a \ c\alpha \ b\alpha + a \ d\alpha + c) \quad \quad AZ = ZA \Rightarrow \{c = 0 \ a = d \text{ et donc}$$

$$Z = (a \ 0 \ b \ a). \text{ L'équation } Z^2 = A \text{ s'écrit } (a^2 \ 0 \ 2ab \ a^2) = (\alpha \ 0 \ 1 \ \alpha).$$

Cas $\alpha = 0$. Alors il n'y a pas de solution.

Cas $\alpha \neq 0$. Alors il y a deux solutions

$$Z = \varepsilon \left(\sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} \ 0 \ \frac{1}{2\sqrt{|\alpha|}} e^{-i\frac{\theta}{2}} \ \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} \right), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}.$$

9°) Soit $A \in M_2(C)$ et l'équation $Z^2 = A$.

Soit h l'endomorphisme de matrice A relativement à la base canonique de C^2 et f l'endomorphisme de matrice Z relativement à cette même base.

Le problème est donc de chercher les f tels que $f^2 = g$.

Si A est semblable à $(\alpha \ 0 \ 0 \ \beta)$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, on est dans le cas de la question 5)

Il y a quatre solutions.

Si A est semblable à $(\alpha \ 0 \ 0 \ 0)$, $\alpha \neq 0$, on est dans le cas de la question 6)

Il y a deux solutions.

Si A est semblable à $(\alpha \ 0 \ 0 \ \alpha)$, $\alpha \in C$, on est dans le cas de la question 7)

Il y a une infinité de solutions.

Si A est semblable à $A = (\alpha \ 0 \ 1 \ \alpha)$, $\alpha \in C$, on est dans le cas de la question 8)

$\{\alpha = 0 \text{ pas de solution } \alpha \neq 0 \text{ deux solutions}\}$

FIN.
