

CONCOURS G2E – PHYSIQUE - 2011

CORRIGE

A. TERRE ET ESPACE

1. PRESSION DANS L'ATMOSPHERE

1.1. Système : {cylindre de section droite S et de hauteur dz}

Référentiel terrestre considéré galiléen

Bilan des forces qui s'exercent sur le cylindre : ($\vec{e}_z$ vecteur unitaire de l'axe vertical Oz dirigé vers le haut)

Son poids : $\vec{P} = -S \cdot dz \cdot \vec{g}_0 = -S \cdot dz \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z$

La résultante des forces pressantes (les forces s'exerçant sur les parois latérales se compensent) :

$$\vec{f} = P(z) \cdot S \cdot \vec{e}_z - P(z + dz) \cdot S \cdot \vec{e}_z$$

A l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur le cylindre est nulle :

$$-S \cdot dz \cdot g_0 \cdot \vec{e}_z + P(z) \cdot S \cdot \vec{e}_z - P(z + dz) \cdot S \cdot \vec{e}_z = \vec{0}$$

En projection sur l'axe Oz, on obtient :

$$-S \cdot dz \cdot g_0 + P(z) \cdot S - P(z + dz) \cdot S = 0$$

D'où finalement : $P(z+dz) - P(z) = dP = -\mu \cdot dz \cdot g_0$

1.2.

1.2.1. On a $dP = -\mu \cdot g_0 \cdot dz$

L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait alors : $\mu = \frac{PM}{RT_0}$

D'où : $dP = -\frac{PM}{RT_0} \cdot g_0 \cdot dz$

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{Mg_0}{RT_0} dz$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{Mg_0}{RT_0} \cdot z$$

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0} \cdot z\right)$$

1.2.2. On cherche h tel que $P(h) = \frac{P_0}{e}$

$$\text{Alors } \frac{P(h)}{P_0} = \frac{1}{e} = \exp\left(-\frac{Mg_0}{RT_0} \cdot h\right)$$

$$\text{Soit } \frac{Mg_0}{RT_0} \cdot h = 1$$

$$\text{Et } h = \frac{RT_0}{Mg_0}$$

Remarque : la valeur de la constante des gaz parfaits n'est pas fournie dans cet énoncé, on prendra $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

$$\text{A.N. } h = \frac{8,31 \cdot 288}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 8,25 \text{ km}$$

1.2.3. Si $z = 10 \text{ km}$, $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right)$, A.N.

$$\underline{P(z)} = 1 * \exp\left(-\frac{10}{8,25}\right) = \underline{0,298 \text{ bar}}$$

1.3.

1.3.1. On a désormais $T(z) = T_0(1 - az)$

$$\text{D'où } dP = -\frac{PM}{RT(z)} \cdot g_0 \cdot dz = -\frac{PM}{RT_0(1-az)} \cdot g_0 \cdot dz$$

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{Mg_0}{RT_0(1-az)} dz = -\frac{Mg_0}{RT_0} \int_0^z \frac{dz}{(1-az)}$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{Mg_0}{RT_0} \left[\frac{-1}{a} \ln(1-az) \right]_0^z = \frac{Mg_0}{aRT_0} \ln(1-az)$$

$$\text{Finalement : } P(z) = P_0 \exp\left(\frac{Mg_0}{aRT_0} \ln(1-az)\right)$$

$$\text{Soit } P(z) = P_0 (1-az)^{\frac{Mg_0}{aRT_0}}$$

$$\textbf{1.3.2.} \text{ Pour } z = 10 \text{ km, } \underline{P(z)} = 1 * (1 - 0,0226 * 10)^{\frac{29*10^{-3}*10}{0,0226*10^{-3}*8,31*288}} = \underline{0,253 \text{ bar}}$$

1.4. Le modèle de l'atmosphère standard permet de calculer à $z = 10 \text{ km}$:

$$\underline{P(z)} = 1 * (1 - 0,0226 * 10)^{5,26} = \underline{0,260 \text{ bar}}$$

Comparons les trois valeurs obtenues pour la pression à $z = 10 \text{ km}$:

$P_{\text{atmosphère isotherme}} = 0,298 \text{ bar}$

$P_{\text{avec T variable}} = 0,253 \text{ bar}$

$P_{\text{atmosphère standard}} = 0,260 \text{ bar}$

Le modèle de l'atmosphère isotherme donne un écart sur la valeur de pression à 10 km de 18% par rapport au modèle avec température variable.

Le modèle de l'atmosphère standard donne un écart sur la valeur de pression à 10 km de 3% par rapport au modèle avec température variable.

Le modèle d'atmosphère standard est donc plus fidèle que celui d'atmosphère isotherme.

2. PRESSION AU CENTRE DE LA TERRE

2.1. Le géoïde est la surface équipotentielle coïncidant avec le niveau moyen des mers.

Par définition, en tout point de cette surface le potentiel gravitationnel a la même valeur. De plus, l'accélération de la pesanteur est perpendiculaire à cette surface en tout point.

2.2. Considérons un petit volume cubique autour d'un point M situé à l'intérieur de la Terre à la distance r du centre : $dV = dS \cdot dr$ (situé de telle sorte que la surface de base dS soit normale au rayon et suffisamment petite pour que la pression puisse y être supposée uniforme).

Par symétrie du problème, la pression dans la Terre ne dépend que de r . Les forces pressantes s'exerçant sur les parois latérales du cube se compensent.

La résultante des forces pressantes s'exerçant sur le petit cube s'écrit donc :

$$\vec{f}_p = (P(r) * dS - P(r + dr) * dS) \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} dr \cdot dS \cdot \vec{e}_r = -\frac{\partial P}{\partial r} dV \cdot \vec{e}_r$$

Et la densité des forces volumiques de pression s'écrit :

$$\vec{f}_{p,v} = \frac{\vec{f}_p}{dV} = - \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r = - \vec{\text{grad}} P$$

2.3. Considérons le petit système cubique de volume dV autour du point M, à l'équilibre à l'intérieur de la Terre.

Il est soumis aux forces : * de pesanteur : $\vec{P} = \rho \cdot dV \cdot \vec{g}$

* de pression : $\vec{f}_p = - \vec{\text{grad}} P \cdot dV$

A l'équilibre, la résultante des forces exercées sur le système est nulle, ainsi :

$$\vec{P} + \vec{f}_p = \rho \cdot dV \cdot \vec{g} - \vec{\text{grad}} P \cdot dV = \vec{0}$$

Soit : $-\rho \cdot \vec{\text{grad}} V - \vec{\text{grad}} P = \vec{0}$

D'où : $-\vec{\text{grad}} (V + P) = \vec{0}$ (car ρ cste)

Alors : $V + P = \text{cste}$

2.4. Déterminons l'expression du potentiel gravitationnel V .

On a $-\vec{\text{grad}} V = \vec{g}$

$-\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r = -g_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r$ (car V ne dépend que de r , et $\vec{g}$ est orienté vers le centre de la Terre)

$$dV = \frac{g_0}{R_T} r dr$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{g_0}{R_T} r^2 \quad \text{en choisissant } V(r=0) = 0$$

On a alors : $V + P = \frac{1}{2} \frac{g_0}{R_T} r^2 + P = \text{cste}$

On peut déterminer la valeur de cette constante en $r = R_T$, à la surface de la Terre :

Alors : $\frac{1}{2} \frac{g_0}{R_T} r^2 + P = \frac{1}{2} \frac{g_0}{R_T} R_T^2 + P_0 = \frac{1}{2} g_0 R_T + P_0$

Et finalement pour $r = 0$, on obtient : $P(0) = \frac{1}{2} g_0 R_T + P_0$

A.N. : $P(0) = \frac{1}{2} \cdot 5500 \cdot 10^3 \cdot 6400 \cdot 10^3 + 10^5 = \underline{1.8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}} = \underline{1.8 \cdot 10^6 \text{ bar}}$

3. FUSEE A UN ETAGE

3.1. On considère le système {fusée}, étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Lors de la phase propulsive, les forces s'exerçant sur ce système s'écrivent :

- Poids : $\vec{P} = m(t) \vec{g} = -m(t) g_0 \vec{e}_z$
- Force de poussée : $\vec{F}_p = -D \vec{u}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à ce système :

$$m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_p = -m(t) g_0 \vec{e}_z - D \vec{u}$$

Avec $\vec{v} = v \vec{e}_z$ et $\vec{u} = -u \vec{e}_z$, en projetant l'équation obtenue sur Oz , on obtient :

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} = - m(t)g_0 + D u$$

Equation différentielle du mouvement de translation de la fusée

- 3.2.** Pour que la fusée décolle, il faut que l'accélération à $t = 0$ soit positive, donc que :

$$- m(t = 0)g_0 + D u > 0$$

Donc : $- Mg_0 + D u > 0$ cad $D u > Mg_0$

Vérification de la condition de décollage :

Ici : $Mg_0 = 150 * 10^3 * 10 = 15.10^5 \text{ kg.m.s}^{-2}$

Et : $D u = 1 * 10^3 * 2,5 * 10^3 = 25.10^5 \text{ kg.m.s}^{-2}$

Donc on vérifie bien $D u > Mg_0$ et la condition de décollage est satisfaite.

- 3.3.** Au cours de la phase propulsive, la masse de la fusée est égale à la masse totale au sol moins la masse de carburant brûlés à l'instant t : $m(t) = M - Dt$

A la fin de cette phase propulsive, tout le carburant a été consommé et $m(t = \tau) = M - m_p$

Alors : $M - D\tau = M - m_p \Rightarrow \tau = \frac{m_p}{D}$

A.N. $\tau = 100 \text{ s}$

- 3.4.** On se place au cours de la phase propulsive, donc pour $0 \leq t \leq \tau$,

D'après la formule établie au 3.1., on a : $m(t) \frac{dv(t)}{dt} = - m(t)g_0 + D u$

En remplaçant $m(t)$ par son expression : $(M - Dt) \frac{dv(t)}{dt} = - (M - Dt)g_0 + D u$

On sépare les variables : $dv(t) = \left(-g_0 + \frac{Du}{M-Dt} \right) dt$

D'où en intégrant : $v(t) - v(0) = -g_0 t - u \ln \ln \left(\frac{M-Dt}{M} \right)$

Or, initialement, la fusée est au repos, donc $v(0) = 0$ et d'autre part on pose $\alpha = D/M = 1/150 \text{ s}^{-1}$:

$$v(t) = -g_0 t - u \ln \ln (1 - \alpha t)$$

- 3.5.** L'altitude $h(t)$ atteinte en fonction du temps est telle que $v(t) = \frac{dh(t)}{dt}$

Alors : $h(t) = \int_0^t \left[-g_0 t - u \ln \ln (1 - \alpha t) \right] dt$

Soit : $h(t) = \left[-g_0 \frac{t^2}{2} - u * \frac{-1}{\alpha} * (1 - \alpha t) * [\ln \ln (1 - \alpha t) - 1] + cste \right]_0^t$

$$h(t) = -g_0 \frac{t^2}{2} + \frac{u}{\alpha} * (1 - \alpha t) * [\ln \ln (1 - \alpha t) - 1] - \frac{u}{\alpha} * [-1]$$

$$h(t) = -g_0 \frac{t^2}{2} + \frac{u}{\alpha} * (1 - \alpha t) * \ln \ln (1 - \alpha t) + ut$$

- 3.6.** Au cours de la phase de propulsion, l'altitude maximale et la vitesse maximale sont atteintes à la fin de la propulsion c'est-à-dire pour $t = \tau$.

$$\text{Alors : } H_{\max} = h(t = \tau) = -g_0 \frac{\tau^2}{2} + \frac{u}{\alpha} * (1 - \alpha \tau) * \ln \ln (1 - \alpha \tau) + u\tau$$

A.N. :

$$H_{\max} = -10 * \frac{100^2}{2} + 2500 * 150 * \left(1 - \frac{100}{150}\right) * \ln \ln \left(1 - \frac{100}{150}\right) + 2500 * 100 = 63 \text{ km}$$

$$\text{Puis } v_{\max} = v(t = \tau) = -g_0 \tau - u \ln \ln (1 - \alpha \tau)$$

$$\text{A.N. : } v_{\max} = -10 * 100 - 2500 * \ln \ln \left(1 - \frac{100}{150}\right) = 1,7 \text{ km.s}^{-1}$$

- 3.7.** La fusée précédente admet une vitesse maximale insuffisante pour pouvoir servir de lanceur.

4. L'ASTRONAUTE DANS LA FUSEE

- 4.1.** La tension artérielle s'écrit d'après l'énoncé : $T = P - P_{\text{atm}}$.

On suppose le sang au repos et on peut donc lui appliquer le principe fondamental de la statique des fluides pour un fluide de masse volumique constante : $P(z) = P_{\text{ref}} - \mu_s \cdot g_0 \cdot (z - z_{\text{ref}})$, z désignant l'altitude dans le corps.

D'où : $T = P_{\text{ref}} - \mu_s \cdot g_0 \cdot (z - z_{\text{ref}}) - P_{\text{atm}} = T_0 - \mu_s \cdot g_0 \cdot (z - z_{\text{cœur}})$ où T_0 désigne la tension artérielle au niveau du cœur.

Tension artérielle au niveau du cerveau : $T_c = T_0 - \mu_s \cdot g_0 \cdot d_{cc} = 10 - 1000 * 10 * 0,45 * 76 / 10^5 = \underline{6,6 \text{ cm Hg}}$.

Tension artérielle au niveau des pieds : $T_p = T_0 + \mu_s \cdot g_0 \cdot d_{cp} = 10 + 1000 * 10 * 1,35 * 76 / 10^5 = \underline{20 \text{ cm Hg}}$.

- 4.2.** Le cerveau n'est plus irrigué lorsque la tension artérielle au niveau du cerveau devient négative : $T_c < 0$. En tenant compte de l'accélération, la tension artérielle au niveau du cerveau s'écrit :

$$T_c = T_0 - \mu_s \cdot (\gamma + g_0) \cdot d_{cc}$$

$$\text{Le cerveau n'est plus irrigué si } T_0 - \mu_s \cdot (\gamma + g_0) \cdot d_{cc} < 0 \Rightarrow \gamma > \frac{T_0}{\mu_s \cdot d_{cc}} - g_0$$

La valeur de l'accélération à partir de laquelle le cerveau n'est plus irrigué est donc

$$= \frac{T_0}{\mu_s \cdot d_{cc}} - g_0 = \frac{10 * 10^5 / 76}{1000 * 0,45} - 10 = \underline{19 \text{ m.s}^{-2}}$$

- 4.3.** Accélération de la fusée précédente en fin de phase propulsive, c'est-à-dire à $t = \tau$:

$$\underline{(\tau)} = \left(\frac{dv}{dt} \right)_{(t=\tau)} = -g_0 + \frac{Du}{M - D\tau} = -10 + \frac{1000 * 2500}{(150 - 100) * 10^3} = \underline{40 \text{ m.s}^{-2}}$$

- 4.4.** En fin de phase propulsive, l'accélération est supérieure à la valeur limite établie en 4.2, le cerveau ne serait donc plus irrigué pour un astronaute en position debout.

S'il reste en position allongée, la tension artérielle reste la même que celle au niveau du cœur en tout point du corps, indépendante de la valeur de l'accélération, et tous les organes sont irrigués.

5. LE MOTEUR CRYOGENIQUE DE LA FUSEE ARIANE V

5.1. ETUDE DE L'ALIMENTATION DU MOTEUR CRYOGENIQUE

5.1.1. En régime permanent, le débit massique du fluide en écoulement se conserve. S'il s'agit en plus d'un fluide incompressible (ce qui est le cas entre A et B où le dioxygène est liquide), le débit massique se conserve.

On peut alors écrire : $D_{vA} = D_{vB}$ soit $v_A * \frac{\pi D^2}{4} = v_B * \frac{\pi d^2}{4}$

On a alors $\underline{v_A} = v_B * \frac{d^2}{D^2} = v_B * \frac{0,20^2}{4,5^2} = 0,002 * v_B \ll v_B$

En régime permanent, v_A est donc négligeable devant v_B .

5.1.2. On étudie un fluide parfait, incompressible, en écoulement permanent isotherme sur un système à parois fixes, et soumis uniquement aux forces pressantes et de pesanteur, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho_2} + g_0 \cdot z_A + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho_2} + g_0 \cdot z_B + \frac{v_B^2}{2}$$

Avec v_A négligeable, on obtient :

$$v_B = \sqrt{2 \left(\frac{P_A - P_B}{\rho_2} + g_0 (z_A - z_B) \right)}$$

$$\text{A.N. : } \underline{v_B} = \sqrt{2 \left(\frac{(3,5-6) \cdot 10^5}{1140} + 10 \cdot 25 \right)} = \underline{7,8 \text{ m.s}^{-1}}$$

5.1.3. Le débit volumique du dioxygène s'écrit : $\underline{D} = v_B * \frac{\pi d^2}{4} = 7,8 * \frac{\pi \cdot 0,20^2}{4} = \underline{0,25 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}$

5.1.4. Masse de dioxygène consommée pendant la phase de propulsion :

$$m_{O_2} = \mu_{O_2} \cdot D \cdot \Delta t = 1140 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot 60 = \underline{171 \text{ tonnes}}$$

5.1.5. Masse de dihydrogène introduit dans la chambre de combustion :

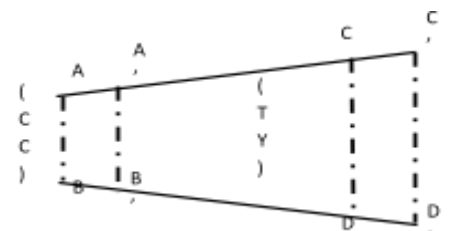
$$m_{H_2} = \mu_{H_2} \cdot 3D \cdot \Delta t = 70 \cdot 3 \cdot 0,25 \cdot 10 \cdot 60 = \underline{31,5 \text{ tonnes}}$$

5.1.6. Masse totale des ergols à stocker dans la fusée : $\underline{m_{tot}} = m_{O_2} + m_{H_2} = 171 + 31,5 \simeq \underline{203 \text{ tonnes}}$

5.2. POUSSEE DU MOTEUR CRYOGENIQUE

5.2.1. Effectuons un bilan enthalpique entre l'entrée et la sortie de la tuyère.

On considère le système ouvert A'B'CD représenté ci-contre dans lequel entre pendant dt le gaz contenu dans ABB'A' à t et duquel sort pendant dt le gaz contenu dans CDD'C' à $t + dt$.



Appliquons le premier principe de la thermodynamique en système ouvert à A'B'CD :

$$dE_{tot,so} + dm_s (h_s + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s) - dm_e (h_e + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e) = \delta Q + \delta W'$$

avec :

$dE_{tot,so}$ = variation d'énergie totale du système ouvert pendant $dt = 0$ car le régime est permanent
indices « s » et « e » relatifs à la sortie et l'entrée du système.

dm_s = masse sortant du système ouvert pendant dt

dm_e = masse entrant dans le système ouvert pendant dt

et $dm_e = dm_s = dm$ en régime permanent

h désigne ici l'enthalpie massique,

v la vitesse des gaz

z l'altitude, avec ici $z_e = z_s$

δQ = énergie thermique algébriquement reçue par le système pendant $dt = 0$ d'après l'énoncé

$\delta W'$ = travail utile algébriquement reçu par le système pendant $dt = 0$ d'après l'énoncé

On obtient alors :

$$dm [(h_s + \frac{1}{2} v_s^2) - (h_e + \frac{1}{2} v_e^2)] = 0$$

Soit en introduisant l'enthalpie molaire h^* telle que $h = h^*/M$ avec M la masse molaire du gaz, on obtient :

$$(h_s^*/M + \frac{1}{2} v_s^2) - (h_e^*/M + \frac{1}{2} v_e^2) = 0$$

$$\text{Soit : } h_s^* + \frac{1}{2} M v_s^2 = h_e^* + \frac{1}{2} M v_e^2 = \text{Cste}$$

5.2.2. On néglige v_e , alors
$$v_s = \sqrt{\frac{2(h_e^* - h_s^*)}{M}}$$

Les gaz sont supposés parfaits, donc au passage par la tuyère, on a $\Delta h^* = h_s^* - h_e^* = c_p^* \cdot \Delta T = c_p^* \cdot (T_s - T_e)$

Avec c_p^* la capacité calorifique molaire à pression constante du gaz telle que $c_p^* = \frac{R}{\gamma - 1}$

$$\text{D'où : } v_s = \sqrt{\frac{2}{M} \frac{R}{\gamma - 1} (T_e - T_s)}$$

$$\text{Puis avec } r = R/M : v_s = \sqrt{2r \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_e - T_s)}$$

5.2.3. On suppose l'écoulement isentropique pour ces gaz considérés parfaits de γ constant : on peut donc appliquer la loi de Laplace : $P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{cste}$

On peut donc écrire entre l'entrée et la sortie de la tuyère : $P_e^{1-\gamma} \cdot T_e^\gamma = P_s^{1-\gamma} \cdot T_s^\gamma$

$$\text{D'où : } T_s = T_e \left(\frac{P_e}{P_s} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\text{A.N. : } T_s = 3500 \left(\frac{35 \cdot 10^5}{50 \cdot 10^2} \right)^{\frac{(1-1,2)}{1,2}} = \underline{1,2 \cdot 10^3 \text{ K}}$$

$$\text{Alors : A.N. : } v_s = \sqrt{2 * 693 * \frac{1,2}{1,2 - 1} * (3500 - 1,2 \cdot 10^3)} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

5.2.4. En reprenant la formule de la question 3. donnant la poussée subie par la fusée égale à $\vec{F}_p = - D \vec{u}$,

avec D le débit massique des gaz brûlés qui s'écrit ici D_m et $\vec{u}$ la vitesse d'éjection des gaz qui s'écrit ici v_s , on obtient bien que la poussée du moteur s'écrit : $F_p = D_m \cdot v_s$.

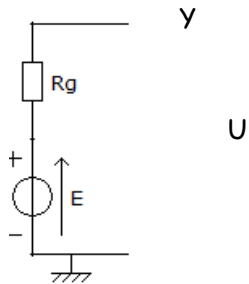
$$\text{A.N. : } F_p = 250 * 4,4 \cdot 10^3 = \underline{1,1 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

B. Mesures d'impédances

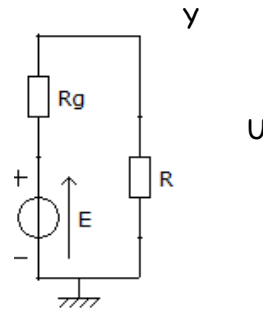
1. Mesure de l'impédance de sortie d'un générateur basse fréquence (GBF)

1.1. Schémas des deux montages utilisés

Premier montage : tension à vide du GBF



Deuxième montage : résistor de résistance R variable aux bornes du GBF



1.2. Comme $E(t) = E_m \cdot \cos \omega t$, on pose en grandeurs complexes : $\underline{E}(t) = E_m \cdot e^{j\omega t}$ et $\underline{U}(t) = U \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi}$

avec $\underline{U}(t)$ la tension mesurée aux bornes de l'oscilloscope.

Comme les résistances n'induisent pas de déphasage, on a $\phi = 0$.

Pour le premier montage, on visualise la tension à vide du GBF donc il n'y a pas de courant circulant dans le circuit donc : $\underline{E}(t) = \underline{U}(t)$, soit en amplitude, on obtient : $E_m = U = E_0$

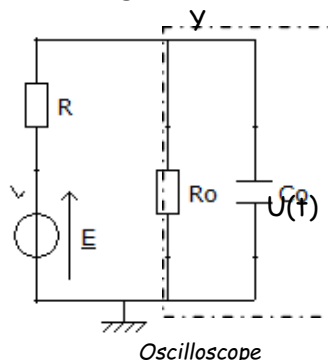
Pour le deuxième montage, on a un pont diviseur de tension, donc : $\underline{U}(t) = \frac{R}{R + R_g} \cdot \underline{E}(t)$, donc en

amplitude, avec $R = R_c$, on obtient : $\frac{E_0}{2} = \frac{R_c}{R_c + R_g} \cdot E_0$ donc $R_g = R_c = 50 \Omega$

2. Mesure de l'impédance d'entrée d'un oscilloscope

2.1. Ordre de grandeur de R_0 : environ $1 \text{ M}\Omega$.

2.2.



On négligera la valeur de la résistance R_g devant les autres résistances du circuit.

2.2.1. $f = 1 \text{ kHz}$: si $R = 0$, $\underline{E}(t) = \underline{U}(t)$, soit en amplitude, on obtient : $E_m = U = E_0$

$$\underline{U}(t) = \frac{R_o}{R + R_o} \underline{E}(t)$$

Si $R = 1 \text{ M}\Omega$,

$$\frac{E_0}{2} = \frac{R_o}{R + R_o} \cdot E_0$$

Soit en amplitude : $\underline{Z} = \frac{R_o}{1 + jR_o C_o \omega}$ donc $R = R_o = 1 \text{ M}\Omega$

2.2.2. $R_g \ll R_o$, R donc il n'est pas nécessaire de prendre en compte la valeur de la résistance R_g dans cette expérience.

2.3.1. $f = 100 \text{ kHz}$

On appelle $\underline{Z}$, l'impédance complexe équivalente au système $R_o \parallel C_o$.

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_o} + jC_o \omega = \frac{1 + jR_o C_o \omega}{R_o} \quad \text{donc} \quad \underline{Z} = \frac{R_o}{1 + jR_o C_o \omega}$$

Comme on travaille à hautes fréquences, on fait l'hypothèse que seul le condensateur intervient dans

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_o \omega}$$

l'impédance complexe de l'oscilloscope, donc :

$$\underline{U}(t) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \underline{E}(t) = \frac{1}{1 + jR C_o \omega} \underline{E}(t)$$

Ainsi

$$|\underline{U}| = \frac{E_o}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC_o \omega)^2}} |\underline{E}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC_o \omega)^2}} E_o$$

Si on passe en module, on obtient :

$$D'où \quad 4 = 1 + (RC_o \omega)^2 \quad \text{donc} \quad C_o = \frac{\sqrt{3}}{2\pi f R} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 63 \cdot 10^3} = 44 \text{ pF}$$

$C_o = 44 \text{ pF}$

$$|\underline{Z}| = \frac{R_o}{\sqrt{1 + (RC_o \omega)^2}}$$

2.3.2. On calcule le module de l'impédance complexe de l'oscilloscope :

Si on travaille à basses fréquences, $(R_o C_o \omega)^2 = (10^6 \cdot 44 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 10^3)^2 = 0,0757 \ll 1$, donc $|\underline{Z}| = R_o$, donc l'hypothèse du **2.2.** est valide.

3. Mesure d'impédances par la méthode des ponts

3.1. Condition d'équilibre d'un pont

3.1.1.

Condition d'équilibre d'un pont : $i = 0$ dans la branche BD

Ainsi la différence de potentiel entre les nœuds B et D est nulle, et on a le même courant dans les branches AB et BC (soit $\underline{i}_1$ ce courant) et dans les branches AD et DC (soit $\underline{i}_2$ ce courant).

On a ainsi : $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AD}$; donc $\underline{Z}_1 \cdot \underline{i}_1 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{i}_2$ (1)

$$\text{Or } \underline{E} = (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{i}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{i}_1 \quad \text{donc } \underline{i}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \quad (2) \text{ et } \underline{i}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (3)$$

$$\text{Donc (2) + (3) dans (1) : } \underline{Z}_1 \cdot \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{Z}_4 \cdot \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \quad \text{ainsi : } \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_2$$

3.1.2. Applications en régime continu :

- Mesures de résistances, d'inductances, de capacités...

C'était le cas il y a plusieurs années mais ces mesures étaient peu précises, il existe désormais des méthodes plus fiables pour déterminer ces données expérimentales.

- Utilisation en CPG dans les catharomètres. Ce sont des thermistances qui permettent de suivre l'évolution du courant en fonction des variations de température.

3.2. Pont de HAY

$$3.2.1. \text{ Expressions des impédances complexes : } \underline{Z}_1 = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_3 = r + \frac{1}{jC\omega}$$

3.2.2. Si l'équilibre du pont est réalisé, on a : $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_2$, soit ici :

$$(R + jL\omega) \cdot \left(r + \frac{1}{jC\omega} \right) = P \cdot Q \quad \text{d'où} \quad Rr + \frac{R}{jC\omega} + jrL\omega + \frac{L}{C} = PQ$$

$$\text{On identifie les parties réelles et imaginaires et on obtient :} \quad Rr + \frac{L}{C} = PQ \quad (1)$$

$$-j \frac{R}{C\omega} + jrL\omega = 0 \quad (2)$$

$$(2) : \quad R = LC\omega^2$$

$$(2) \text{ dans (1) : } LC\omega^2 + \frac{L}{C} = PQ$$

$$\text{d'où } L = \frac{PQ}{\frac{1}{C} + r^2 C \omega^2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{\frac{1}{15 \cdot 10^{-9}} + (1,4 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-9}} = 90 \text{ mH}$$

$$L = 90 \text{ mH}$$

$$\text{et } R = 90 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-9} \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 1,9 \Omega$$

$$R = 1,9 \Omega$$

3.3. Pont de MAXWELL

3.3.1. Expressions des impédances complexes :

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{\frac{1}{r'} + jC'\omega} = \frac{1 + jr'C'\omega}{r'} \quad \text{donc} \quad \underline{Z}_3 = \frac{r'}{1 + jr'C'\omega}$$

Si l'équilibre du pont est réalisé, on a : $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_2$,

$$\text{soit ici : } (R + jL\omega) \cdot \frac{r'}{1 + jr'C'\omega} = P \cdot Q \quad \text{donc} \quad Rr' + jLr'\omega = PQ + jr'C'PQ\omega$$

On identifie les parties réelles et imaginaires et on obtient :

$$Rr' = PQ$$

$$L = C'PQ$$

3.3.2. Applications numériques :

$$r' = \frac{PQ}{R} = \frac{2.10^3 \cdot 3.10^3}{1,9} = 3,2 M\Omega$$

$$r' = 3,2 M\Omega$$

$$C' = \frac{L}{PQ} = \frac{90.10^{-3}}{2.10^3 \cdot 3.10^3} = 15 nF$$

$$C' = 15 nF$$

3.4. Pont de WIEN

$$3.4.1. \quad \underline{Z}_2 = P \quad \underline{Z}_3 = Q \quad \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \quad \underline{Z}_4 = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

$$\text{donc} \quad \underline{Z}_4 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Si l'équilibre du pont est réalisé, on a : $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_2$,

$$\text{soit ici : } \left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \right) \cdot Q = \left(\frac{R}{1 + jRC\omega} \right) \cdot P \quad \text{donc} \quad \left(\frac{jR_1C_1\omega + 1}{jC_1\omega} \right) \cdot Q = \frac{P \cdot R}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{On pose } x_1 = R_1C_1\omega, \text{ donc on obtient : } \left(\frac{jx_1 + 1}{jC_1\omega} \right) \cdot Q = \frac{P \cdot R}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Soit : } (1 + jx_1) \cdot Q \cdot (1 + jRC\omega) = P \cdot R \cdot jC_1\omega \quad \text{ou} \quad Q \cdot (1 + jRC\omega + jx_1 - RC\omega x_1) = jPRC_1\omega$$

On identifie les parties réelles et imaginaires et on obtient: $1 = RC\omega x_1$ (1)

$$Q \cdot (RC\omega + x_1) = PRC_1\omega \quad (2)$$

$$(1) : \quad RC\omega = \frac{1}{x_1}$$

$$(1) \text{ dans } (2) : \quad Q \cdot \left(\frac{1}{x_1} + x_1 \right) = PRC_1\omega$$

$$R = \frac{Q}{PC_1\omega} \cdot \left(\frac{1}{x_1} + x_1 \right) \quad (2')$$

$$C = \frac{1}{R\omega x_1} = \frac{1}{x_1 \cdot \omega} \cdot \frac{PC_1 \omega}{Q(\frac{1}{x_1} + x_1)} = \frac{PC_1}{Q(1 + (x_1)^2)}$$

(2') dans (1) :

3.4.2. Applications numériques :

$$x_1 = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 = 1$$

$$R = \frac{Q}{1000 \cdot Q \cdot 10^{-6} \cdot 2000} \cdot (1 + 1) = 1,0 \Omega$$

$$\mathbf{R = 1,0 \Omega}$$

$$C = \frac{1000 \cdot Q \cdot 10^{-6}}{Q \cdot (1 + 1)} = 500 \mu F$$

$$\mathbf{C = 500 \mu F}$$