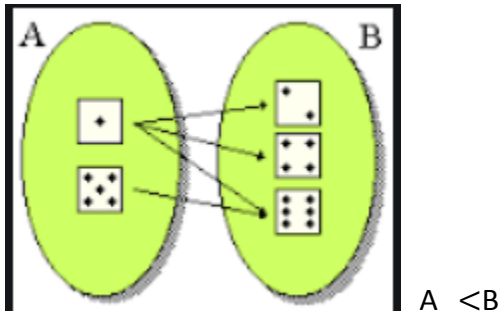


FUNCIÓN REAL

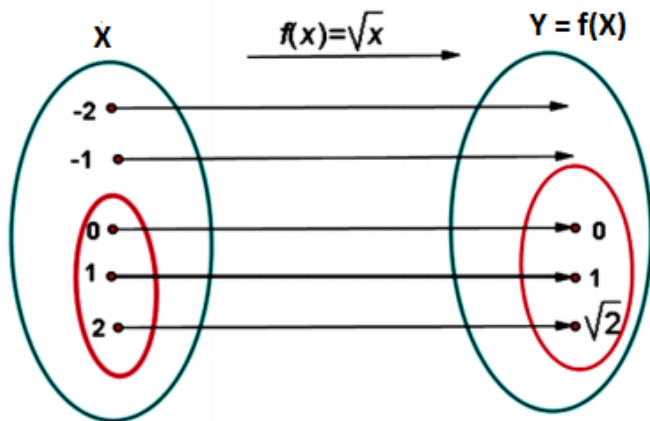
Una función real es un tipo especial de relación entre 2 conjuntos numéricos reales.

Relación de conjuntos:

Se da cuando en 2 conjuntos tienen algo en común y cumplen una propiedad específica en común. Ejemplo R
($A \subset B$)



Una **FUNCIÓN** entre dos conjuntos numéricos es una relación tal que a cada número del conjunto de partida le corresponde una sola imagen del conjunto de llegada. Así, en la figura siguiente podemos observar gráficamente el comportamiento de la función raíz cuadrada de un número. Del lado izquierdo observamos el conjunto de partida (representado por los valores que le asignemos a la variable independiente “X”), del lado derecho observamos el conjunto de llegada (representado por los valores que toma la variable dependiente “Y” una vez que se extrae la raíz cuadrada del valor que se le asignó a “X”) y sobre la flecha está indicada la relación matemática (función) que transforma los valores del conjunto de partida en los valores del conjunto de llegada (imagen)



Dominio de una función

Es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a “X” (variable independiente) forman el conjunto de partida. Gráficamente lo miramos en el eje horizontal (abscisas), leyendo como escribimos de izquierda a derecha. El dominio de una función está formado por aquellos valores de “X” (números reales) para los que se puede calcular la imagen $f(x)$.

En la gráfica anterior notamos que si le asignamos los valores “-2” y “-1” a la “X” estos no tienen imagen, por lo tanto no pertenecen al dominio de la función estudiada. Esto es lógico ya que los números negativos no tienen raíces reales sino raíces imaginarias.

Rango de una función

Es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "Y" (variable dependiente), por eso se denomina " $f(x)$ ", su valor depende del valor que le demos a "X". Gráficamente lo miramos en el eje vertical (ordenadas), leyendo de abajo a arriba. El Rango de una función es el conjunto formado por las imágenes $f(x)$ de los valores de "X" que pertenecen al Dominio de dicha función. La manera más efectiva para determinar el Rango consiste en graficar la función y ver los valores que toma "Y" de abajo hacia arriba.

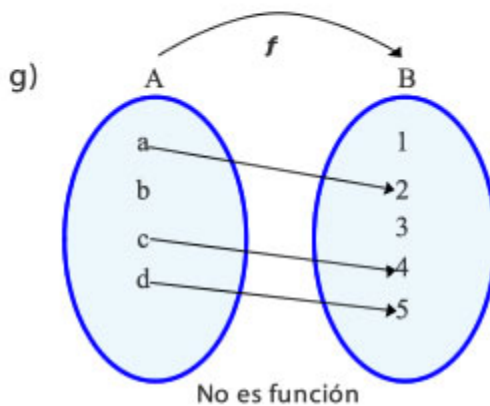
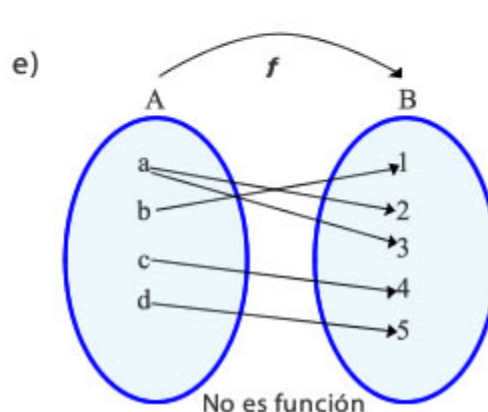
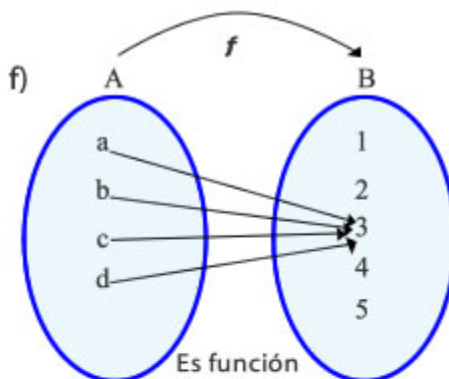
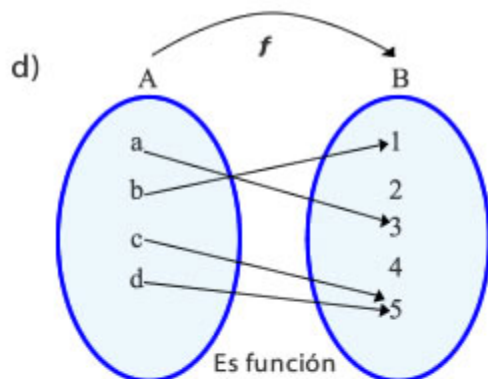
Una **función real f de variable real** es una relación que asocia cada número real x un **único** número real $f(x)$.

Se expresa de la siguiente manera:

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

La variable x se llama **variable independiente** y la variable y es la **variable dependiente**.

¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones?



FUNCIONES

Estudiemos este concepto como un tipo especial de relaciones, analizando los diagramas sagitales de la figura 5.

En la relación F de A en B cada elemento del dominio (conjunto A), está relacionado con un solo elemento del rango (conjunto B).

En la relación H de C en D , nos muestra un elemento del dominio que está relacionado con dos elementos diferentes de rango, es decir, $\circ$ está relacionado con a y $\circ$ está relacionado con b .

En la relación G de E en F , cada elemento del dominio está relacionado con un solo elemento del conjunto F , pero existe un elemento del dominio (conjunto E), que no está relacionado con ningún elemento del conjunto F .

De las anteriores relaciones, solamente es función la relación F .

Dados dos conjuntos A y B diferentes de vacío, se define una función F de A en B como el conjunto de parejas ordenadas (x, y) , en el cual dos parejas ordenadas distintas no tienen la misma primera componente. Es bueno recordar que el dominio de F es todo el conjunto A .

Esta definición de función se puede formular también de la siguiente forma:

*Dados dos conjuntos A y B , diferentes de vacío, una relación F de A en B es una **función**, si el dominio de F es todo el conjunto A y a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento de B .*

Comprobemos la definición mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$, y sea G una relación de X en X definida por $G = \{(x, y)/x = y\}$, determinar si G es una función.

Solución

El conjunto solución de G es $S = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. En este conjunto solución ningún elemento de X es primera componente de más de una pareja ordenada; por lo tanto, la relación G es una función.

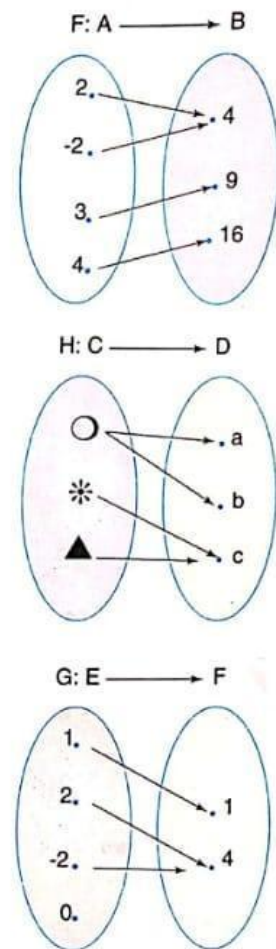


Figura 5

Ejemplo 2

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ (Fig. 6), y sea H una relación de A en B , definida por $H = \{(x, y)/y = 2x\}$, determinar si H es una función de A en B .

Solución

El conjunto solución de H es $S = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$. Observa que cada uno de los elementos de A está relacionado con un único elemento de B , luego H es una función (Fig. 6).

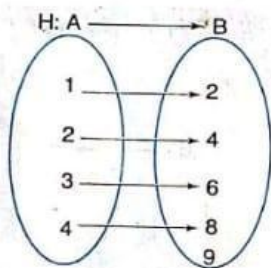


Figura 6

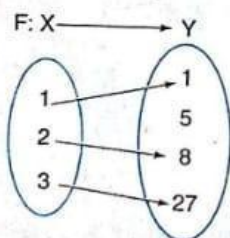


Figura 7

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 5, 8, 27\}$. Sea F una función de X en Y definida por $F = \{(x, y)/y = x^3\}$.

Su conjunto solución es $S = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$, y su representación, mediante un diagrama sagital, es la figura 7.

Teniendo en cuenta el concepto de dominio y rango de una relación, se puede hacer lo mismo para una función, luego $\text{Dom}(F) = \{1, 2, 3\}$ y $\text{R}(F) = \{1, 8, 27\}$. Observa que el elemento 5 del conjunto Y no pertenece al rango de la función porque no está relacionado con ningún elemento de X .

A los elementos del rango de una función también se les suele llamar conjunto de imágenes de la función, luego 1 es imagen de 1, mediante la función F , o también se puede escribir $1 = f(1)$, 8 es la imagen de 2 mediante la función F , es decir, $8 = f(2)$, 27 es imagen de 3 mediante la función F , es decir, $27 = f(3)$.

En una forma general se puede dar el valor de un elemento del rango así: $y = f(x)$; esta notación quiere decir que y es la imagen de x mediante la función f .

En la expresión $y = f(x)$; x se llama variable independiente, y y es la variable dependiente.

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente.
El **rango** de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente.

Por ejemplo: Indica si las siguientes relaciones definen una función o no.

a. A cada persona le corresponde su edad en años:

Respuesta: Si es una función, ya que a cada persona le corresponde una edad, es decir una sola imagen.

b. A cada persona le corresponde los idiomas que habla:

Respuesta: No es función, ya que a una persona le corresponden varios idiomas, es decir la imagen no es única.

c. Sabores de helado preferidos por los integrantes de un grupo de amigos:

Respuesta: No es función, ya que a cada integrante le corresponde más de un sabor de helado, es decir la imagen no es única.

Representación de funciones

Ejemplo “Tu salida del próximo fin de semana, está en función (es decir depende) de tus notas en la escuela”.
Queda claro que la salida es la variable dependiente, de las notas que saques en la escuela.

Representación algebraica

En este caso, la función se representa mediante una ecuación o fórmula que deja en evidencia la relación que existe entre una variable dependiente “y” y una independiente “x”.

Ejemplo:

$$y = 2x$$

Si expresáramos esta función en lenguaje común, diríamos que “y” valdrá siempre el doble de lo que valga “x”.

Representación gráfica

Se trata de líneas rectas o curvas que surgen luego de haber elaborado un cuadro de valores a partir de la representación algebraica que vimos en el ítem anterior.

FUNCIÓN LINEAL. Y AFIN

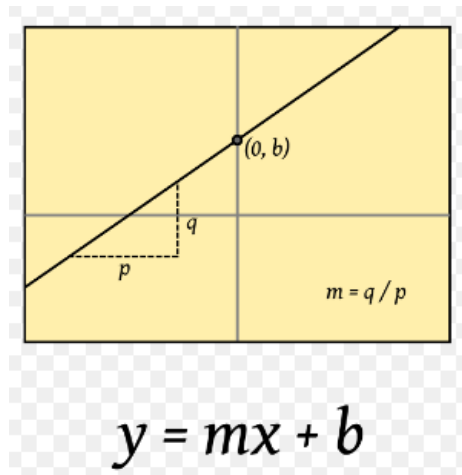
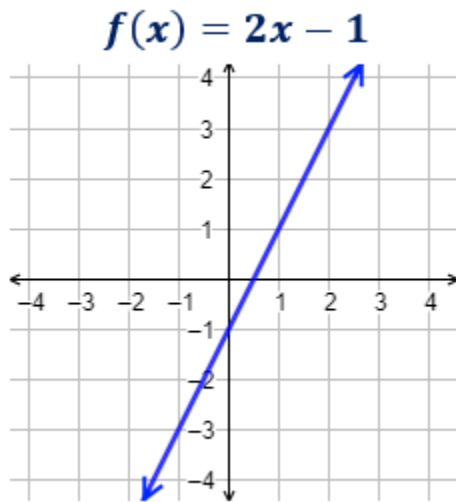
Es una función polinómica de primer grado, cuya gráfica siempre es una línea recta. Lo que significa que cualquier cambio o incremento de la variable independiente (X), ocasiona un cambio o incremento proporcional en la variable dependiente (Y). Su ecuación tiene la siguiente forma

$$Y = mx + b \quad \text{ó} \quad f(x) = mx + b$$

$m \neq 0$

- m es la **pendiente** de la función, diferente de cero
- b es la **ordenada** (en el origen) de la función; el intercepto con el eje Y.

Ejemplo $Y = 2x - 1$ o sea $f(x) = 2x - 1$ por lo tanto $m = 2$ $b = -1$



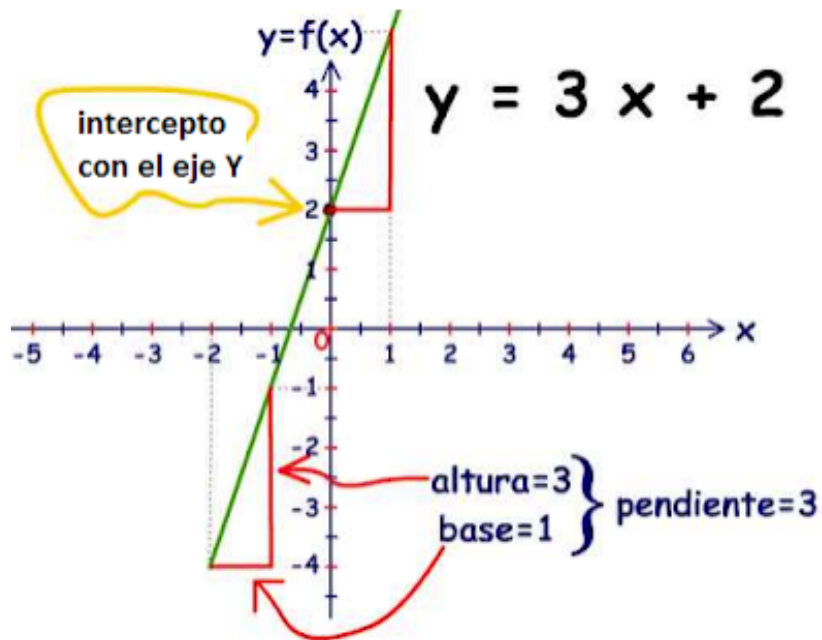
$m = 2$ $b = -1$

Al tener una pendiente de 2 vemos que cada unidad que se avanza en X hacia la derecha (+1), avanzamos 2 unidades en Y, hacia arriba (+2).

$b = -1$ se nota donde la recta corta el eje Y.

$$m = \frac{\text{Variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{2}{1} = +2$$

Otro ejemplo $y = 3x + 2$



$$m = \frac{\text{Variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{3}{1} = +3$$

Cómo graficar funciones lineales (rápidamente)

$$y = mx + b$$

Pendiente

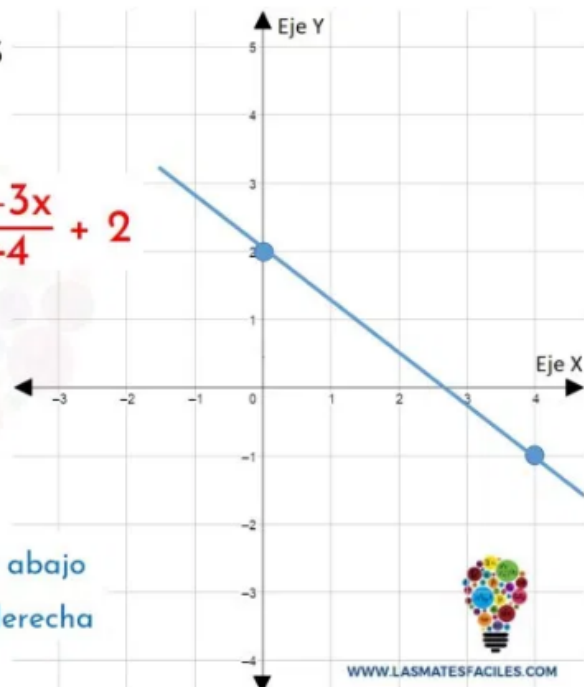
Intercepto con el eje Y

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

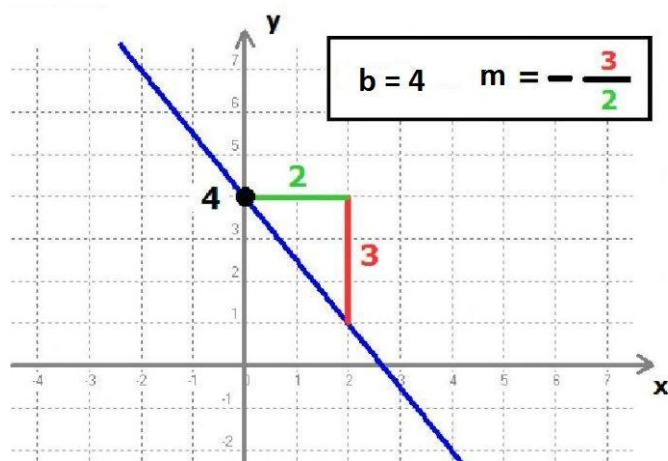
$$m = \frac{\text{Variación vertical}}{\text{Variación horizontal}}$$

$$y = \frac{-3x}{+4} + 2$$

3 hacia abajo
4 a la derecha



Ejemplo 3. Hallar ecuación de la siguiente función lineal.



El intercepto con X es +4 , y la pendiente es $-3/2$, ya que cada que se avanza 2 unidades a la derecha, se avanza 3 hacia abajo (-).

$$m = \frac{\text{Variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{-3}{2}$$

Entonces la solución es $F(x) = -\frac{3}{2}x + 4$

Nota: algunos autores solo llaman función lineal, aquellas donde $b = 0$, o sea que la gráfica pasa por el origen (0,0). Ejemplo $y = 3x$, las demás las llaman **función afín**.

PASOS PARA GRAFICAR CUALQUIER FUNCIÓN POR EL MÉTODO DE TABULACIÓN

1. Arma una tabla de valores, tabulando diferentes valores de "x" de acuerdo a su dominio. Escoge valores negativos y positivos, también es recomendable coger el valor de cero para la X, y así saber si la gráfica pasa por el origen del plano cartesiano.
2. Halla para cada valor escogido de "X" (dominio) su respectiva imagen.
3. Representa los pares ordenados (X, Y) como puntos en el plano cartesiano.
4. Une los puntos del plano cartesiano, si la gráfica es una línea recta, bastara solo con 2 puntos, pero para un trazo más equilibrado es mejor poner varios. Si la gráfica no es una línea recta se requiere de tantos puntos como se pueda.

Una función lineal se diferencia por que el exponente máximo de las variables es 1, o sea de primer grado, y no presenta términos con raíces, ni presenta variables en denominador.

Ejemplo. Grafica la función: $y = 2x + 1$

Esta es una función lineal, por lo tanto su dominio son todos los números reales, al igual que el rango.

Dom $(-\infty, +\infty)$ Rango $((-\infty, +\infty))$.

1. Escojamos valores para X, en este caso se puede cualquier valor real, escogimos valores enteros y cercanos al cero por facilidad para graficar.

$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ este es un subconjunto del dominio.

2. Hallamos la imagen de cada valor escogido en el dominio, al reemplazar el número dado por la variable X

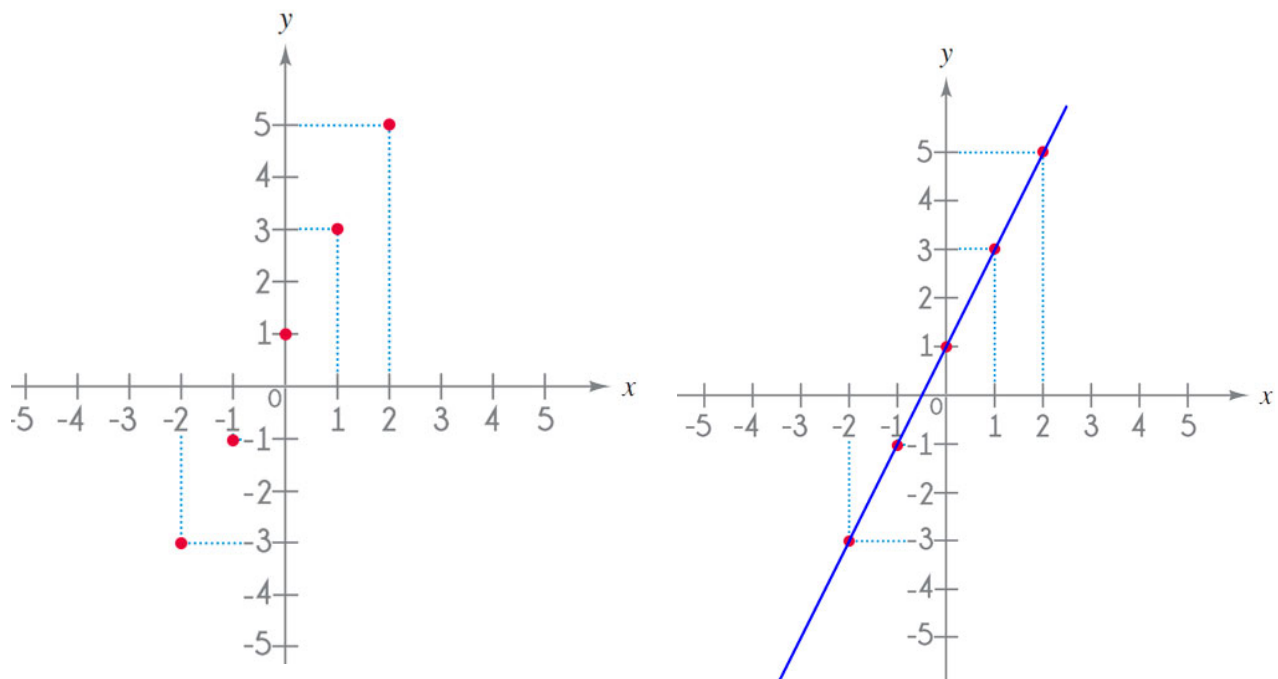
$$y = 2x + 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

- $f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$
- $f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$
- $f(0) = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$
- $f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$

x	-2	-1	0	1	2
y f(x)	-3	-1	1	3	5
(x, y)	(-2, -3)	(-1, -1)	(0, 1)	(1, 3)	(2, 5)

4. Representamos las coordenadas (x,y) en el plano cartesiano y unimos los puntos, en este caso es una línea recta



DOMINIO Y RANGO Y DE OTRAS FUNCIONES

No en todas las funciones el dominio y el rango son todos los números reales, como sucede con la función lineal, ya que hay ciertas restricciones que impiden a ciertos valores reales hacer parte de estos dos conceptos.

Restricciones para el dominio y rango

- **funciones racionales (con denominadores de tipo polinómico)**

Cuando hay un denominador en forma de polinomio, o sea cuando una de las variables se encuentra en el denominador, existe uno o varios valores reales que no puede tomar, debido a que convierte el denominador en cero, lo cual es un error.

* Ejemplo 1 $y = \frac{4}{x-1}$ en este caso la X no puede tomar el valor de 1, por qué se anularía el denominador, ya que $1-1$ da cero lo cual no es posible. Entonces el dominio serían todos los números reales excepto el 1

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{ó} \quad (-\infty, +1) \cup (+1, +\infty).$$

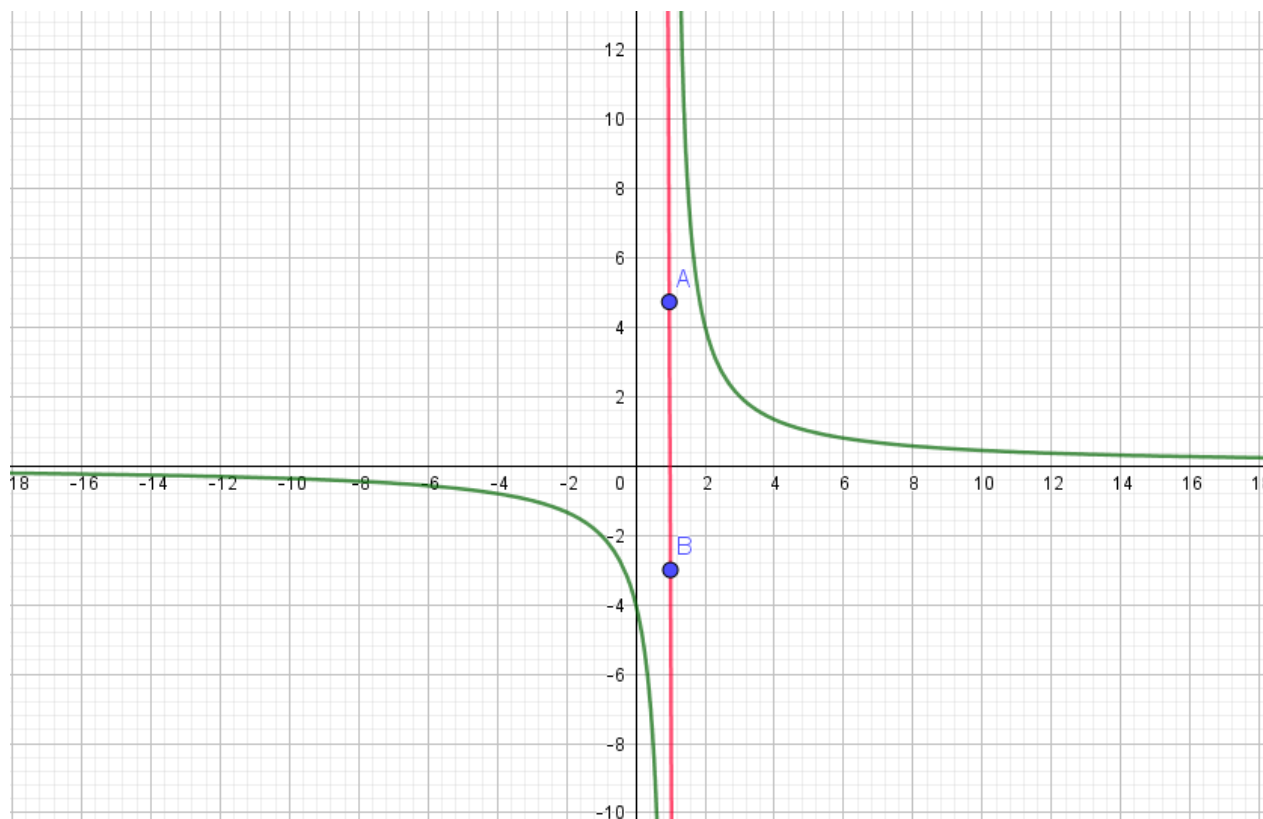
Para hallar el rango debemos despejar la X para ver que valores puede tomar la Y.

$$y = \frac{4}{x-1} \quad x-1 = \frac{4}{y} \quad x = \frac{4}{y} + 1$$

En este caso la Y no puede tomar el valor de cero, por lo que el rango, son todos los reales excepto el cero

$$\text{Rango} = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ó} \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Gráfica



En la gráfica se puede ver que en forma horizontal (X) no se toma el valor de +1 en el dominio donde se ve una línea roja (asíntota). Y en forma vertical (y) la gráfica no toma el valor de cero en el rango, se acerca infinitamente pero nunca llega a cero.

*Ejemplo 2. $Y = \frac{2x+3}{3x-4}$ en este caso si igualamos a cero el denominador, para ver qué valor no es permitido para X; $3x - 4 = 0$ donde $x = 4/3$.

Por lo tanto Dom = $R - \{4/3\}$.

Para hallar el rango despejamos la X.

$$Y = \frac{2x+3}{3x-4}; \quad (3x - 4) \cdot Y = 2x + 3; \quad 3xy - 4y = 2x + 3; \quad 3xy - 2x = 3 + 4y; \quad X(3y - 2) = 3 + 4y;$$

$$X = \frac{4y+3}{3y-2}; \quad \text{igualamos a cero el denominador para ver restricciones } 3y - 2 = 0; \quad y = 2/3$$

$$\text{Rango} = R - \{2/3\}$$

Como pueden ver el rango coincide con los coeficientes que tenga la X, en este caso $Y = \frac{2x+3}{3x-4}$, sería $2/3$, una forma más rápida de obtener el rango. (cuando la X presenta varias exponentes, se escoge el coeficiente del mayor grado).

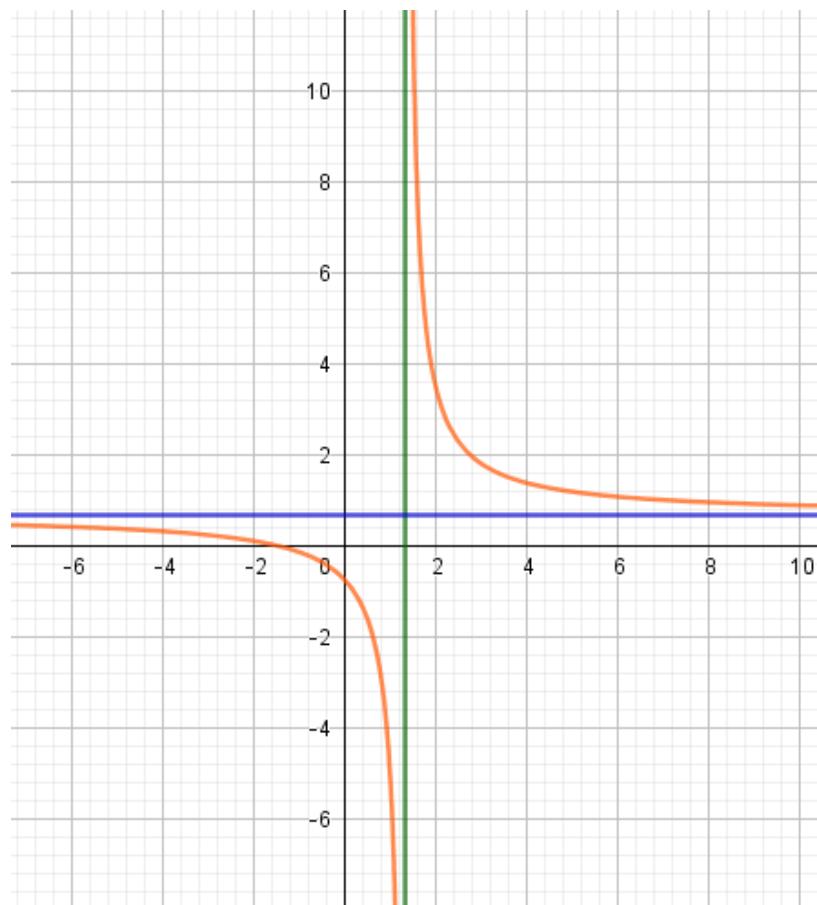
Gráfica

En la gráfica (color naranja) se puede ver que en forma horizontal (X) no se toma el valor de $4/3$ en el dominio donde se ve una línea verde (asíntota). Y en forma vertical (y) la gráfica no toma el valor de $2/3$ en el rango (asíntota azul).

Verde: asíntota vertical

Azul: asíntota horizontal

Gráfica: color naranja



- Funciones con términos radicales

Cuando el índice de la raíz es par, existirá una restricción en los números reales y es que la cantidad subradical no puede ser negativa, ya que nos enfrentamos a cantidades imaginarias. Si el índice es par este inconveniente no se presenta.

Ejemplo $Y = \sqrt{2x + 3}$ tenemos un índice par que es el 2, por lo tanto la cantidad $2x + 3$ no puede ser negativa, o sea $2x + 3 \geq 0$

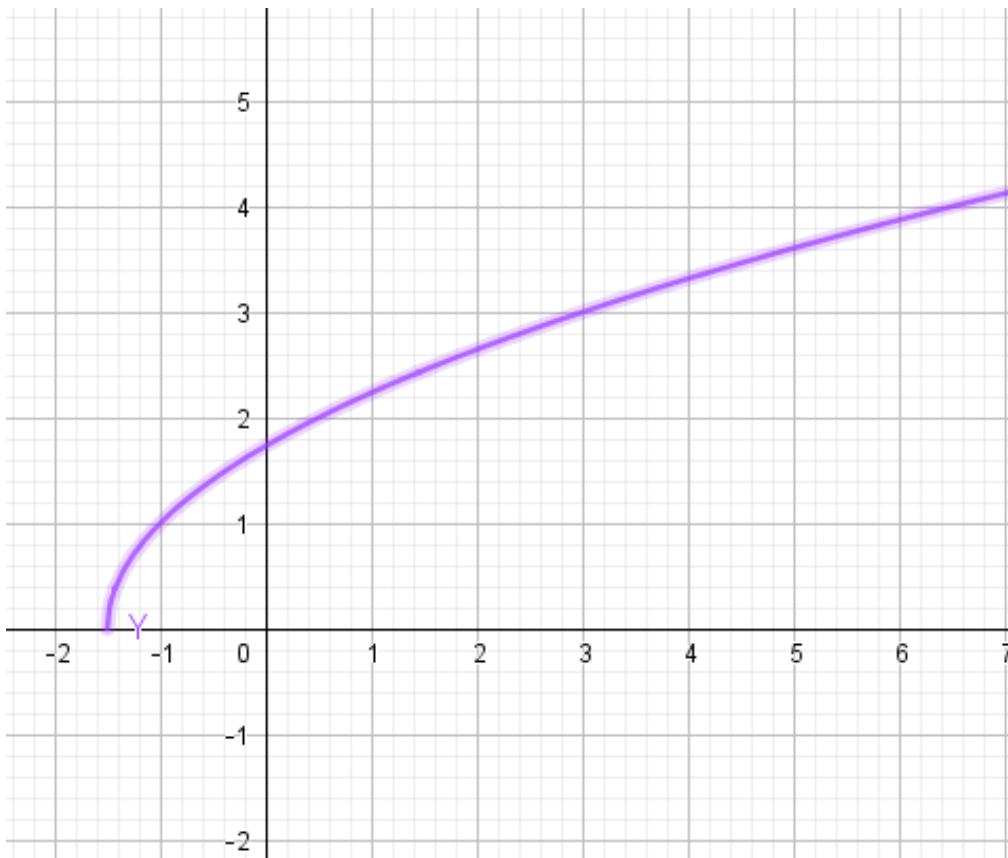
Tenemos una inecuación donde $2x \geq -3$; $x \geq -3/2$ dominio = $[-3/2, +\infty)$

Para hallar el rango es importante saber que de la raíz par nunca saldrá un valor negativo, por lo tanto El rango solo puede tomar valores desde el cero hacia los positivos

Rango = $\{y/y \geq 0\}$ ó Rango = $[0, +\infty)$.

En el caso de tener un menos antes de la raíz, ya tomaría el cero y los reales negativos.

Gráfica. Observe como de forma vertical solo toma valores positivos y el cero y en forma horizontal valores mayores de $-3/2$ (rango y dominio respectivamente)



- **Funciones cuadráticas**

Son aquellas que tiene como exponente mayor de la variable X el 2,

Ejemplo $Y = x^2 + 2x + 3$, en el dominio no hay ninguna restricción por la cual es todos los reales

Para hallar el rango usaremos la ecuación general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para eso igualamos a cero la ecuación $Y = x^2 + 2x + 3$

$$0 = x^2 + 2x + 3 - y$$

Donde se usan los coeficientes de la variable, y la constante **$ax^2 + bx + c$**

$$0 = x^2 + 2x + 3 - y$$

$$a = +1$$

$$b = +2$$

$$c = +3 - y$$

$$x = \frac{-(+2) \pm \sqrt{(+2)^2 - 4(+1)(+3-y)}}{2(+1)}$$

Acá lo que interesa es la raíz que debe ser mayor o igual que cero

$$(+2)^2 - 4(+1)(+3 - y) \geq 0$$

$$4 - 12 + 4y \geq 0$$

$$4y \geq 8$$

$$y \geq 2 \quad \text{donde rango} = [2, +\infty)$$

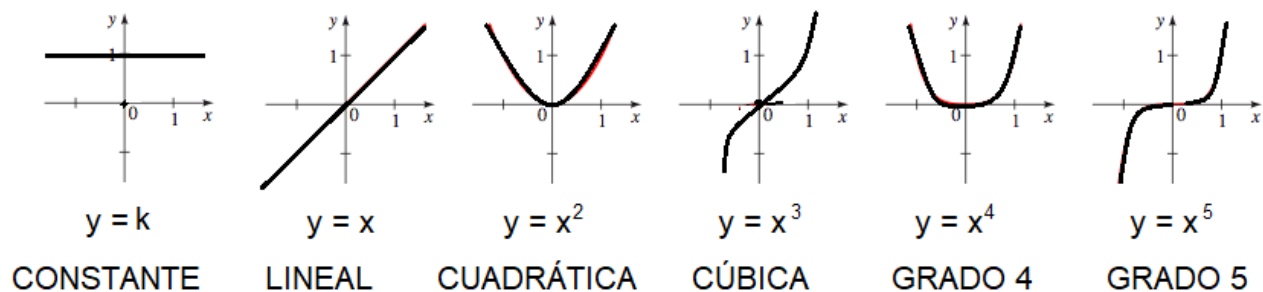
DETERMINACIÓN ALGEBRAICA DEL DOMINIO EN ALGUNAS FUNCIONES:

- **FUNCIÓN POLINÓMICA:** es una función $f(x)$ cuya expresión es un polinomio de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Tales como las funciones lineales (línea recta), función cuadrática (parábola), cúbica y de grados superiores.

Todo este tipo de funciones **tienen como dominio $x \in \mathbb{R}$** , y es continua (sin huecos, saltos o baches en la gráfica) en todo su dominio.



- **FUNCIÓN RADICAL:** Denominamos así a todas aquellas funciones $f(x)$, en las cuales la variable independiente se encuentra bajo un radical; para determinar su dominio tenemos dos posibilidades, ya que pueden tener:

Índice impar: en este caso el dominio es $x \in \mathbb{R}$, por ejemplo si: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$

ÍNDICE IMPAR ↓ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$	EL RESULTADO SIEMPRE SERÁ UN NÚMERO REAL. Por lo tanto $D_f = x \in \mathbb{R}$
--	--

NOTA: Lo anterior solo es válido si la variable "x" no se encuentra en el denominador.

Índice par: para que el dominio de esta función sea un número real, es necesario que el radicando (expresión que hay bajo el radical) sea positiva o cero, de lo contrario, es decir si es negativa, sería un número imaginario que esta por fuera nuestro conjunto universal de referencia que son los $\mathbb{R}$, por ejemplo si: $f(x) = \sqrt[4]{3x - 6}$

ÍNDICE PAR ↓ $f(x) = \sqrt[4]{\underbrace{3x - 6}_{\substack{\uparrow \\ \text{RADICANDO}}}}$	POR LO TANTO: Para que nuestro dominio este dentro de los $\mathbb{R}$, $3x-6$ debe ser mayor o igual que cero, así: $3x - 6 \geq 0$ $3x \geq 0 + 6$ $x \geq 6/3$ $x \geq 2, \text{ es decir } D_f = x \in [2, \infty)$
---	---

- **FUNCIÓN RACIONAL:** La función racional, se caracteriza por estar conformada por polinomios en su numerador y su denominador, son la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, en donde $q(x) \neq 0$

Por lo tanto para hallar el dominio de este tipo de funciones es necesario excluir a los valores que hacen que, $q(x) = 0$

Veamos por ejemplo la función: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{8 - 4x}$

Para esta función $p(x) = x^2 - 2x + 4$ y $q(x) = 8 - 4x$

En el caso de $p(x)$ no hay ninguna restricción, pero para $q(x)$, debemos garantizar que sea diferente de cero.

$$8 - 4x \neq 0$$

Denominador diferente de cero

$$-4x \neq 0 - 8$$

Despejamos la "x"

$$x \neq \frac{-8}{-4}$$

El dos genera una indeterminación, hace que el denominador sea cero.

$$x \neq 2,$$

$$D f x = \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Se excluye del dominio de esta función