

Ραντεβού με το Δία

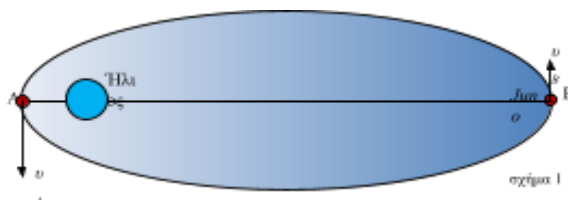
A) Το διαστημόπλοιο Juno εκτοξεύτηκε από το Ακρωτήριο Κανάβεραλ τον Αύγουστο του 2011 και σε ύψος $h = 4200\text{km}$ πάνω από το έδαφος, στη σκοτεινή πλευρά, τέθηκε σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας που έπρεπε να έχει το Juno, ώστε να γίνει δορυφόρος σε κυκλική τροχιά γύρω από τον Ήλιο, στο ύψος h ; Να την συγκρίνετε με την ταχύτητα διαφυγής από το βαρυτικό πεδίο της Γης, που είναι $11,2\text{km/s}$.

β) Ποια ήταν η περίοδος της κίνησης;

γ) Πόση ήταν η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη – Juno αν η μάζα του μετά την τοποθέτησή του στην τροχιά ήταν $m = 3\text{tn}$;

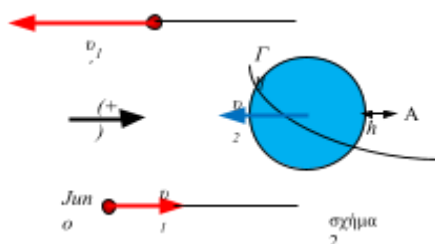
δ) Στην πραγματικότητα το διαστημόπλοιο τέθηκε σε ελλειπτική τροχιά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σε ποιο από τα σημεία A και B είχε τη μεγαλύτερη και σε ποιο τη μικρότερη ταχύτητα;

B) Η Γη όμως κινείται γύρω από τον ήλιο με ταχύτητα $v_r = 30\text{km/s}$. Έτσι μετά από αλλαγή τροχιάς, τον Οκτώβρη του 2013, πέρασε σε απόσταση $h = 500\text{km}$ από την επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα $u = 35\text{km/s}$ (σχήμα 2 - σημείο A στη σκοτεινή πλευρά).

Αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης (flyby) ήταν να επιταχυνθεί, αποκτώντας ταχύτητα ικανή να το φέρει τον Ιούλιο του 2016 κοντά στο Δία. Υποθέτοντας ότι η προσέγγιση έγινε όπως δείχνει το σχήμα 2, δηλαδή στην ίδια διεύθυνση:



α) Υπολογίστε τις δυνάμεις που δέχεται το Juno από τον Ήλιο και τη Γη στο σημείο A.

Μπορεί το σύστημα Γη - Juno να θεωρηθεί μονωμένο;

β) Ποια θα είναι η τελική ταχύτητα του Juno ως προς τον ήλιο;

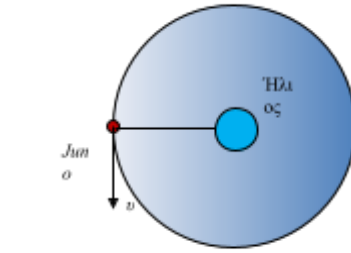
Δίνονται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, η μάζα του Ήλιου

$M_H = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, η μάζα της Γης $M_r = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, η ακτίνα της Γης $R = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$ και η

απόσταση των κέντρων Γης - Ήλιου $r = 15 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

Απάντηση

A) α) Για να γίνει δορυφόρος του Ήλιου πρέπει να εκτοξευτεί κάθετα στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα κέντρα Γης - Ήλιου (σχήμα 3). Προφανώς η απόσταση από τον Ήλιο τη στιγμή της εκτόξευσης μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίση με r αφού είναι $r + (R + h) = 15 \cdot 10^{10} + 106 \cdot 10^5 \approx 15 \cdot 10^{10} \text{ m}$



σχήμα 3

Η ταχύτητα είναι αυτή που απαιτείται για να τεθεί σε κυκλική τροχιά, με την ελκτική δύναμη από τον Ήλιο να παίζει το ρόλο της απαιτούμενης κεντρομόλου δύναμης:

$$\Sigma F_r = F_K \Leftrightarrow G \frac{M_H m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_H}{r}}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{15 \cdot 10^{10}}} \Leftrightarrow v \approx 30 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 30 \text{ km/s}.$$

Η ταχύτητα αυτή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διαφυγής από το βαρυτικό πεδίο της Γης, που είναι $11,2 \text{ km/s}$.

β) $v = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{10}}{30 \cdot 10^3} \Leftrightarrow T = \pi \cdot 10^7 \text{ s} \approx 1 \text{ χρόνος (το περιμέναμε;)}$

γ) Όταν ο πύραυλος φορέας έδωσε στο Juno την τελική του ταχύτητα, η κίνηση γινόταν πλέον μόνο με τη βαρύτητα, άρα η μηχανική ενέργεια παρέμενε σταθερή, ίση με

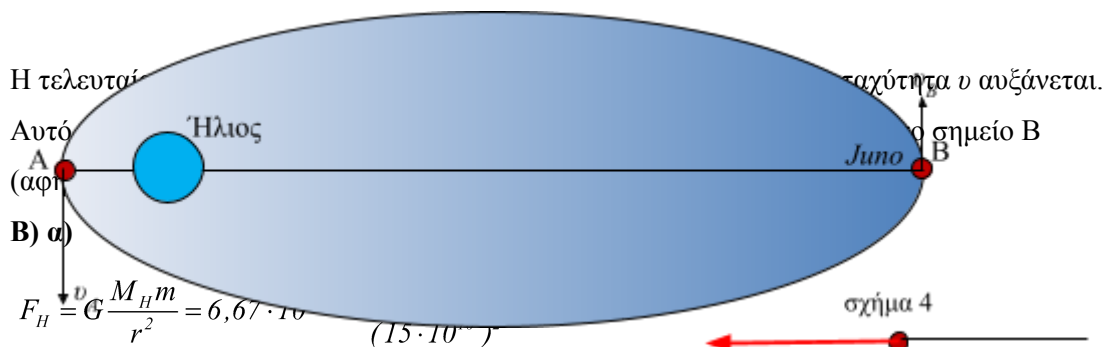
$$E_{MHX} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_H m}{r} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 900 \cdot 10^6 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{10}}$$

$$= 1,35 \cdot 10^{12} - 2,66 \cdot 10^{12} = -1,31 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

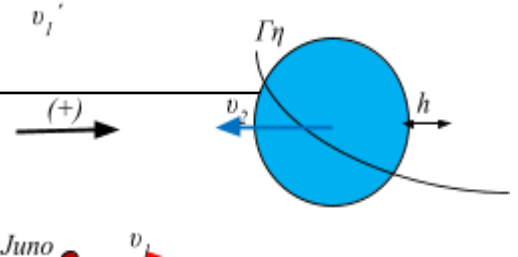
δ) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Ήλιος - Juno ήταν σταθερή, άρα

$$E_{MHX} = C \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_H m}{r} = C \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = C + G \frac{M_H m}{r}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2C}{m} + 2G \frac{M_H}{r}}$$



σχήμα 4



$$F_r = G \frac{M_r m}{(R+h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^3}{(69 \cdot 10^5)^2} \approx 25217 N$$

Παρατηρούμε ότι $F_r \gg F_{Hb}$, άρα η επίδραση του Ήλιου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και το σύστημα Γη - Juno είναι μονωμένο.

β) Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΟ για το σύστημα,

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\pi r i v} &= \vec{p}_{\mu \epsilon \tau \alpha} \Leftrightarrow m v_1 + M_r v_2 = m v_1' + M_r v_2' \\ \Leftrightarrow m(v_1 - v_1') &= M_r(v_2' - v_2) \end{aligned}$$

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας επιβάλλει

$$\begin{aligned} K_{\pi r i v} + U_{\pi r i v} &= K_{\mu \epsilon \tau \alpha} + U_{\mu \epsilon \tau \alpha} \\ \xrightarrow{U_{\pi r i v} = U_{\mu \epsilon \tau \alpha}} \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M_r v_2^2 &= \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} M_r v_2'^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} m(v_1^2 - v_1'^2) &= \frac{1}{2} M_r(v_2'^2 - v_2^2) \\ \Leftrightarrow m(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') &= M_r(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \end{aligned}$$

Διαιρούμε (2)/(1)

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) αποτελούν σύστημα από τη λύση του οποίου προκύπτει

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{2M_r v_2 + (m - M_r)v_1}{m + M_r} \xrightarrow{/M_r} v_1' = \frac{2v_2 + (\frac{m}{M_r} - 1)v_1}{\frac{m}{M_r} + 1} \\ \xrightarrow{\frac{m}{M_r} \rightarrow 0} v_1' &\approx 2v_2 - v_1 \end{aligned}$$

Θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά $v_1' \approx 2v_2 - v_1 = 2 \cdot (-30) - (+35) = -95 \text{ km/s}$

δηλαδή έχουμε μια πολύ μεγάλη αύξηση του μέτρου της ταχύτητας του Juno.

Για τη Γη έχουμε

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m v_1 + (M_r - m)v_2}{m + M_r} \xrightarrow{/M_r} v_2' = \frac{2\frac{m}{M_r}v_1 + (1 - \frac{m}{M_r})v_2}{\frac{m}{M_r} + 1} \\ \xrightarrow{\frac{m}{M_r} \rightarrow 0} v_2' &\approx v_2 \end{aligned}$$

δηλαδή σχεδόν μηδενική μεταβολή στην ταχύτητά της.

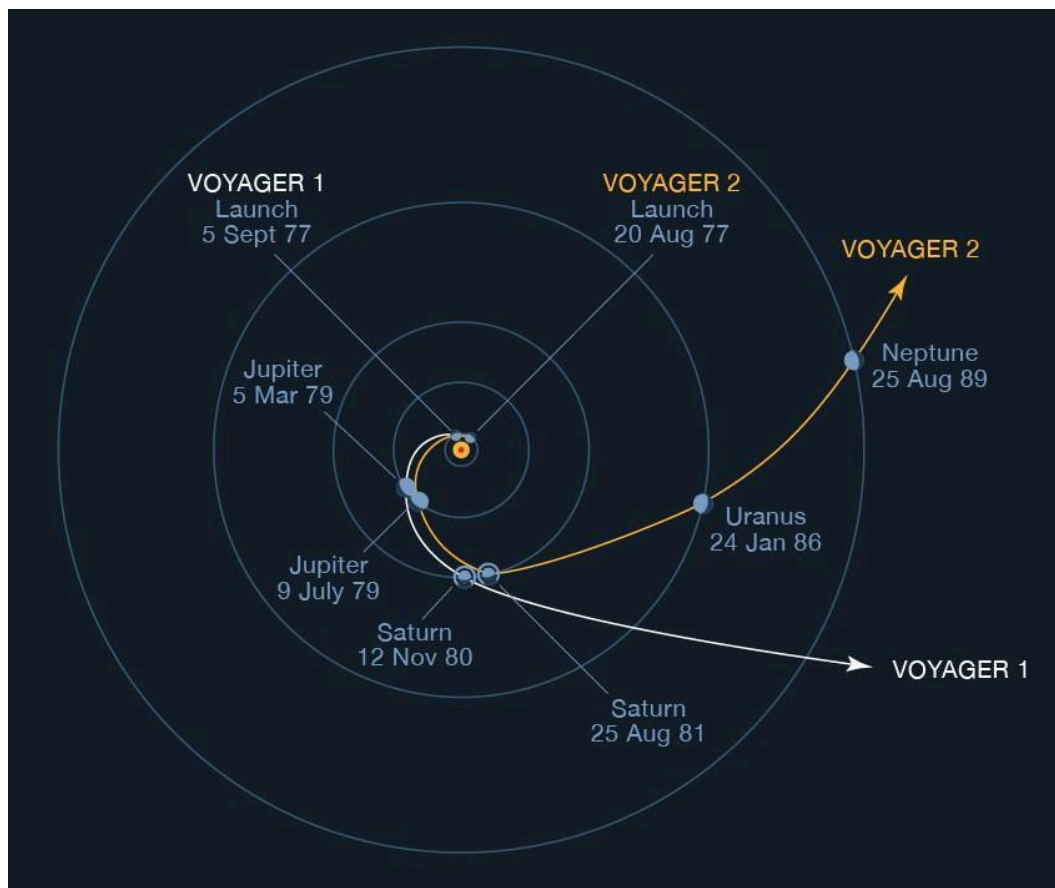
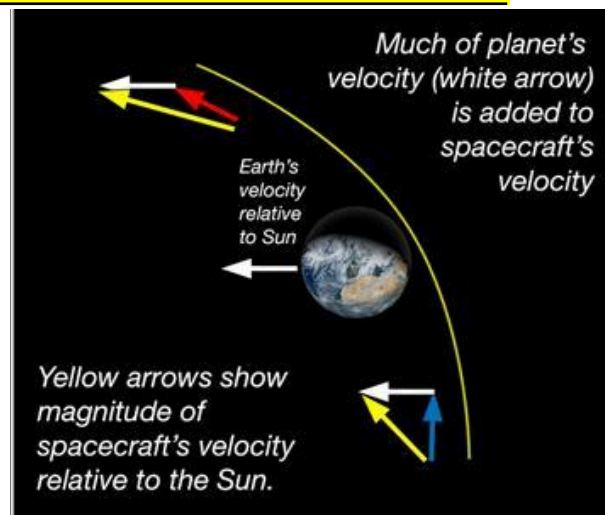
Σχόλια

1) Στην άσκησή μας για διδακτικούς σκοπούς η προσέγγιση έγινε με τις ταχύτητες στην ίδια διεύθυνση. Στην πράξη σχηματίζουν γωνία όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το Juno προσέγγισε τη Γη με ταχύτητα 35km/h και απομακρύνθηκε με ταχύτητα περίπου 39km/h.

2) Η χρήση της «βαρυτικής βοήθειας» (gravity assist) έλυσε το πρόβλημα των διαπλανητικών ταξιδιών, γιατί τα καύσιμα των διαστημοπλοίων ούτε το 50% της απαραίτητης ώθησης δεν μπορούν να προσδώσουν. Ισοδυναμεί με την

ώθηση που θα έδινε δεύτερη εκτόξευση, σχεδόν πανομοιότυπη με την αρχική!

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε τη gravity assist για τα Voyager. Το Voyager 1 για παράδειγμα, δέχτηκε δύο ωθήσεις. Στις 5 Μαρτίου 1979 από το Δία και στις 12 Νοέμβρη του 1980 από τον Κρόνο.



Η διαδικασία gravity assist, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για επιβράδυνση του διαστημοπλοίου, με σκοπό την τοποθέτησή του σε τροχιά γύρω από έναν πλανήτη. Για

παράδειγμα τα διαστημόπλοια Mariner 10 και Messenger πραγματοποίησαν παρόμοιες μανούβρες για να συναντηθούν με τον πλανήτη Ερμή.

3) Το φαινόμενο είναι ανάλογο με το φαινόμενο της ελαστικής κρούσης ενός σώματος μάζας m με ένα σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας M . Άλλωστε προκύπτουν οι ίδιες τελικές σχέσεις.

Θα μπορούσαμε να φανταστούμε ένα μπαλάκι πινγκ - πονγκ με οριζόντια ταχύτητα $35m/s$ να χτυπάει στο κατακόρυφο τζάμι ενός φορτηγού που κινείται αντίθετα με $30m/s$. Ο

φορτηγατζής θα τη δει να έρχεται με $65m/s$ και να ανακρούει ως προς το τζάμι με $65m/s$.

Ένας παρατηρητής ακίνητος στο δρόμο θα προσμετρήσει και την ταχύτητα του φορτηγού που εκτόξευσε το μπαλάκι, άρα $65 + 30 = 95m/s$. Το φορτηγό δε θα «καταλάβει» τίποτα...

4) Ας προσέξουμε ιδιαίτερα το «περίπου ίσον» στις εξισώσεις των ταχυτήτων μετά τη μανούβρα. Μην ξεχνάμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του Juno γίνεται με ισόποση μείωση της κινητικής ενέργειας της Γης. Η μείωση στην ταχύτητα όμως της τεράστιας μάζας της Γης είναι της τάξης των $\mu m/s$, σαφέστατα αμελητέα.

Περισσότερες πληροφορίες

https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/earthflyby.html

και το animation της προσέγγισης

[Juno trajectory \(flight plan\) animation](#)

Α ν δ ρ έας Ρ ι ζ όπουλος